OBJAVNÉ VYUČOVANIE GEOMETRIE

KATARÍNA ČURILLOVÁ

ABSTRAKT

Stále častejšie sa do výučby matematiky aplikujú počítačové softvéry, hlavnými dôvodmi týchto aplikácií je nenáročné približovanie reálnych situácií, možnosť rýchlejšie a presnejšie sa dopracovať k výsledkom riešenia úloh, zjednodušenie práce. V súčasnosti jeden z najlepších voľne šíriteľných programov použiteľných v tematickom celku Geometria a meranie je softvér Geogebra. My sme ho využili v tejto práci na prezentáciu konštruovania trojuholníka. Prezentovali sme základné vlastnosti trojuholníka a pomocou troch objavných úloh si žiaci tieto vlastnosti môžu precvičiť. Ďalšia časť obsahuje stručné zhrnutie najdôležitejších vlastností daných trojuholníkov. V poslednej časti sme prezentovali konštrukčné riešenia trojuholníkov. Zostrojovali sme trojuholník zo zadaných troch strán podľa matematickej vety sss, z dvoch strán a z uhla, ktorý tieto strany zvierajú podľa vety sus a trojuholník z jednej strany a z dvoch priľahlých uhlov podľa vety usu. V závere sme zhodnotili, že učiteľ má kľúčové postavenie na vyučovacej hodine, dokáže matematiku urobiť zaujímavou, zábavnou, dokáže žiakov motivovať a priviesť k poznaniu, že svet a matematika sú úzko späté a nedajú sa oddeliť.

ÚVOD

Stále častejšie sa do výučby matematiky aplikujú počítačové softvéry, hlavnými dôvodmi týchto aplikácií je nenáročné približovanie reálnych situácií, možnosť rýchlejšie a presnejšie sa dopracovať k výsledkom riešenia úloh, zjednodušenie práce. Jedným z ďalších motívov je, že pri zmenách v zadaní úloh môžeme okamžite poukázať a vidieť zmeny vo výsledkoch riešených úloh. Počítačové softvéry tiež podmieňujú využívanie objavného vyučovania, čím si žiaci rozvíjajú tvorivé myslenie, priestorovú predstavivosť, odhaľujú problémy, formulujú otázky a vyslovujú hypotézy. Medzi najnovšie prehľadné a rýchlo sa vyvíjajúce programy dynamickej geometrie patrí GEOGEBRA. Spája geometriu, algebru a matematickú analýzu, poskytuje možnosť zobraziť zápis konštrukcie, možnosť voľby parametrov, umožňuje export obrázkov.

Výhodou tiež je možnosť tvorby interaktívneho výučbového materiálu, ktorý sa dá umiestniť na internete. Pre uvedené vlastnosti som sa rozhodla práve tento program využiť pri výučbe tematického okruhu **Geometria a merania**.

V tematickom okruhu Geometria a merania sa žiaci zoznamujú so základnými geometrickými útvarmi, skúmajú a objavujú ich vlastnosti. Učia sa zisťovať odhadom, meraním a výpočtom veľkosť uhlov, dĺžok, povrchov a objemov, riešia polohové a metrické úlohy z bežnej reality a rozvíjajú svoju priestorovú predstavivosť.

V treťom ročníku osemročného štúdia pri výučbe tohto tematického celku sa učí trojuholník - základný rovinný útvar.

Vzdelávací výstup žiaka by mal byť nasledovný:

vedieť rozlíšiť vonkajší a vnútorný uhol trojuholníka, poznať vetu o súčte vnútorných uhlov trojuholníka, súčte vnútorného a vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole trojuholníka, vedieť zostrojiť výšky trojuholníka, poznať základné vlastnosti strednej priečky trojuholníka, vedieť zostrojiť strednú priečku, ťažnice a ťažisko, zostrojiť trojuholník z troch strán *sss*, zostrojiť trojuholník z dvoch strán a z uhla, ktorý tieto strany zvierajú *sus*, zostrojiť trojuholník z jednej strany a z dvoch priľahlých uhlov *usu*, dosahovať presnosť pri konštrukciách, popísať zhodnosť dvoch rovinných útvarov, vedieť používať vety o zhodnosti dvoch trojuholníkov pri riešení úloh, získať prvé skúsenosti s dokazovaním zhodnosti dvoch trojuholníkov, využiť zhodnosť pri jednoduchých konštrukciách.

1. Trojuholník ABC, vzťahy medzi stranami a uhlami v tom istom trojuholníku

1.1 Základné pojmy trojuholníka

Trojuholník ABC - označenie Δ ABC

Definícia: Trojuholník ABC (označenie Δ ABC) s vrcholmi A, B, C definujeme ako prienik troch polrovín, $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$

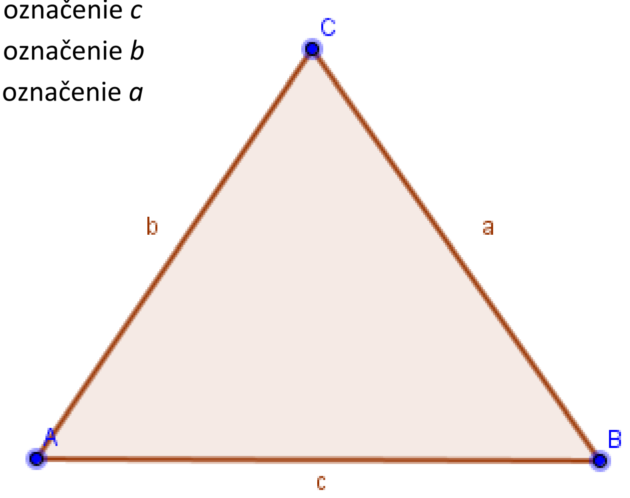
Ak body Δ ABC ležia na jednej priamke potom taký trojuholník neexistuje.

Vrcholy Δ ABC sú body A, B, C

Strany Δ ABC sú úsečky: AB označenie *c*

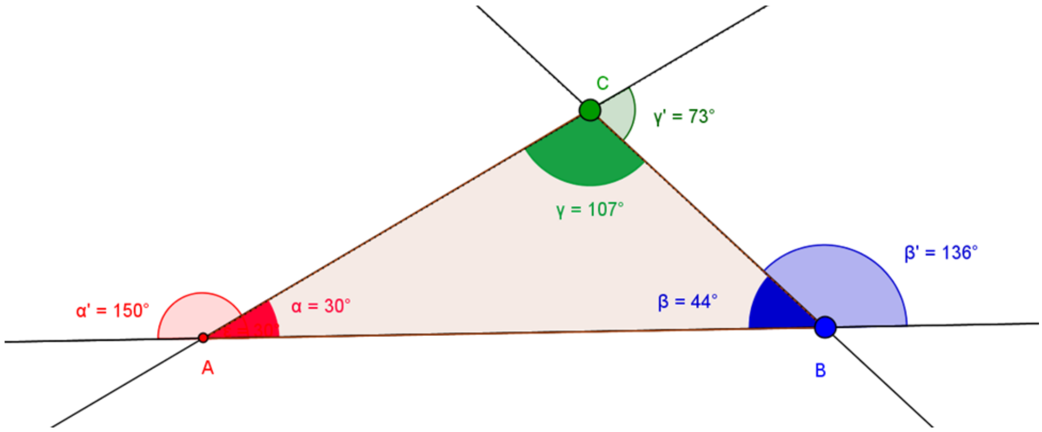
AC označenie *b*

BC označenie *a*



Obrázok 1 Trojuholník – označenie vrcholov a strán, zdroj ttp://www.deviatacim.szm.com/geogebra.htm

Vnútorné uhly Δ ABC α, β, γ
Vonkajšie uhly Δ ABC α´ ,β´, γ´

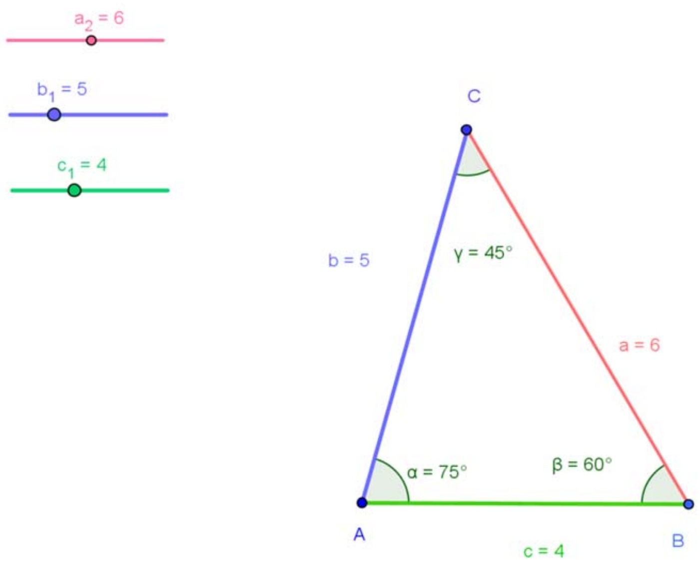


Obrázok 2 Trojuholník – označenie vonkajších a vnútorných uhlov zdroj http://www.deviatacim.szm.com/geogebra.htm

1.2 OBJAVNÉ ÚLOHY

Objavná úloha 1

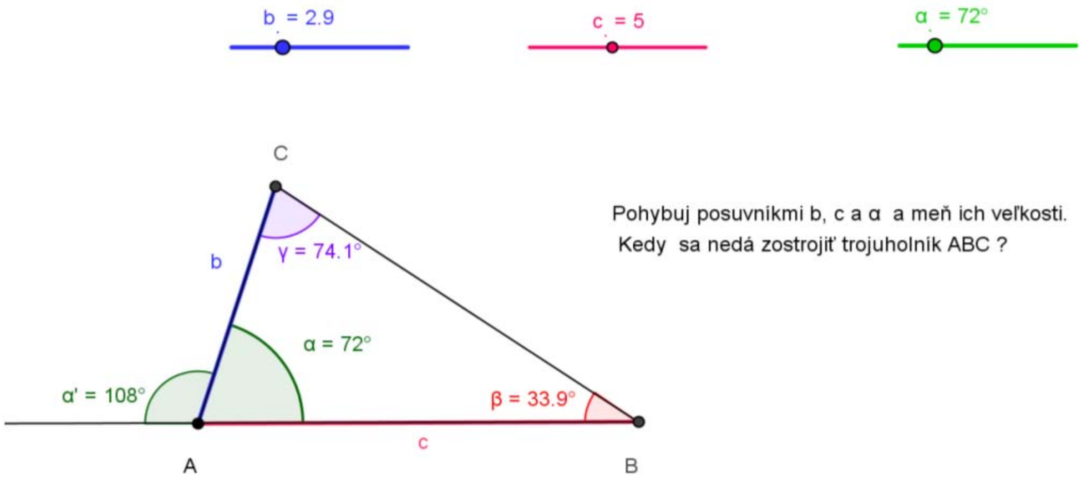
Daný je Δ ABC, ktorého strany majú dĺžku a, b, c .
Overujte či existuje súvislosť medzi dĺžkami strán a, b, c .
Porovnávajte súčty: a + b , c ; b + c, a; a + c, b;
a - b , c ; b - c, a; a - c, b.
Kedy Δ ABC neexistuje?



Obrázok 3 Trojuholník – objavná úloha 1, zdroj http://www.deviatacim.szm.com/geogebra.htm

Objavná úloha 2

Daný je Δ ABC, poznáme dĺžku strán a, c a veľkosť vnútorného uhla α pri vrchole A.

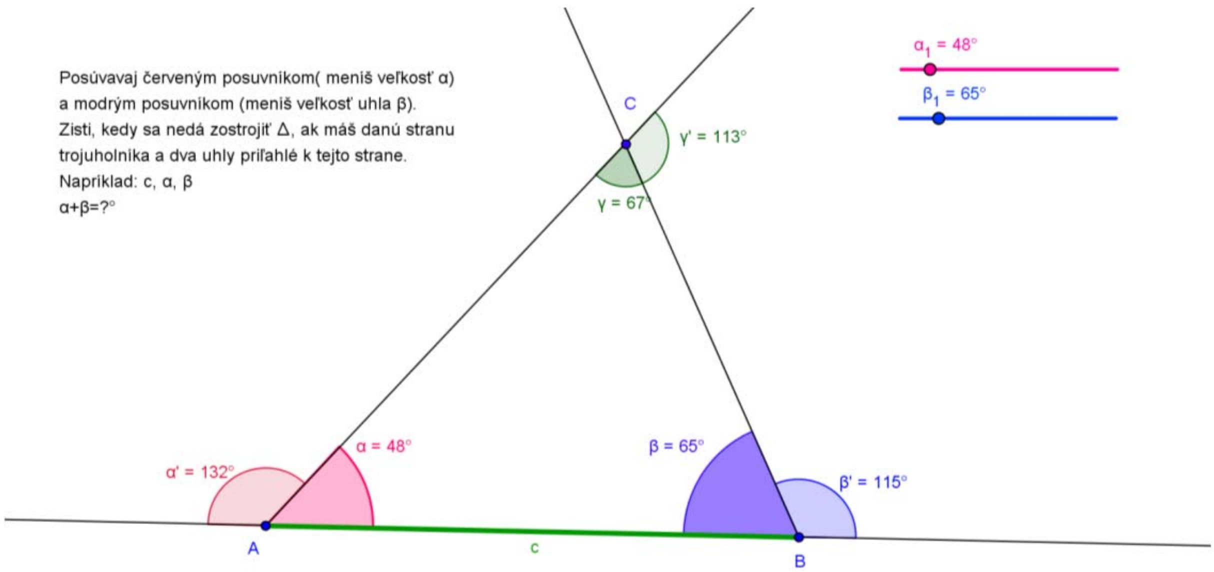


Obrázok 4 Trojuholník – objavná úloha 2, zdroj http://www.deviatacim.szm.com/geogebra.htm

Otázky: Skúmajte súvislosť medzi veľkosťou uhla **α**, stranou **a**.
Určte veľkosť vonkajšieho uhla **α´** pri vrchole **A**
Skúmajte súvislosť medzi uhlami **α**, **α´**
Skúmajte súvislosť medzi veľkosťou uhla **α´** a vnútornými uhlami **β**, **γ**.

Objavná úloha 3

Daný je Δ ABC, poznáme dĺžku strany c a veľkosti vnútorných uhlov α, β pri vrcholoch A, B.



Obrázok 5 Trojuholník – objavná úloha 3, zdroj http://www.deviatacim.szm.com/geogebra.htm

Otázky: Ak **α** = **β**, čo platí pre strany **a**, **b**?
Ak **α** < **β**, aký je vzťah medzi stranami **a**, **b**?
Určte veľkosť vnútorného uhla **γ** pri vrchole **C .**
Určte veľkosť vonkajších uhlov **α´** ,**β´**, **γ´** pri vrcholoch **A**, **B** , **C**.

Skúmajte súvislosť medzi veľkosťami uhlov **α**, **β**, **γ** .
Skúmajte súvislosť medzi veľkosťami vnútorných uhlov **α**, **β** a vonkajším uhlom **γ´**.

1.3 Zhrnutie získaných poznatkov

Vety o vzťahoch medzi stranami a uhlami v tom istom trojuholníku :

Proti zhodným stranám ležia zhodné uhly.
Proti zhodným uhlom ležia zhodné strany.
Proti väčšej strane leží väčší uhol.
Proti väčšiemu uhlu leží väčšia strana.

Trojuholníková nerovnosť: Aby Δ ABC so stranami *a*,*b*,*c* existoval, musí platiť trojuholníková nerovnosť $a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

V každom trojuholníku sa súčet vnútorných uhlov rovná 180° (priamemu uhlu).

V každom trojuholníku sa vonkajší uhol pri jednom vrchole rovná súčtu vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch.

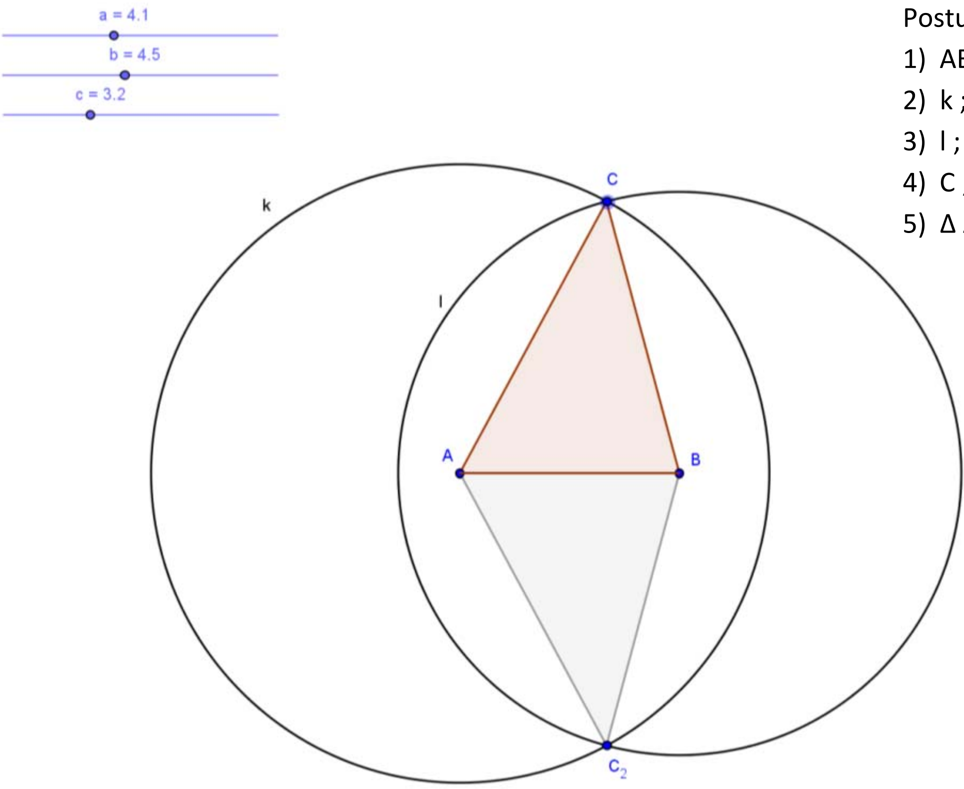
1.4 Konštrukcia trojuholníka

Úloha 1

Zostrojte Δ ABC, ktorého strany majú dĺžku a, b, c.

Riešenie:

Rozbor: 1) Ľubovoľne zvolíme úsečku **AB**, **|AB| = c** a hľadáme vrchol **C**
2) Vzdialenosť bodu **C** od bodu **A** je **|AC| = b**, preto vrchol **C** je bodom kružnice **k,**
k(A, r = b)
3) Vzdialenosť bodu **C** od bodu **B** je **|BC| = a**, preto vrchol **C** je bodom kružnice **l**
l(B, r = a)
4) Bod **C** je priesečníkom kružníc **k** a **l**



Postup konštrukcie:
1) AB; |AB| = c
2) k ; k(A, r = b)
3) l ; l(B, r = a)
4) C ; C € k ∩ l
5) Δ ABC

Obrázok 6 Riešenie konštrukčnej úlohy 1

Diskusia :
Počet riešení závisí od počtu spoločných bodov kružníc **k, l** .
Pre $|a - b| < c < a + b$ má úloha 2 zhodné riešenia .
Pre $|a - b| \geq c$ alebo $c \geq a + b$ úloha nemá riešenie .

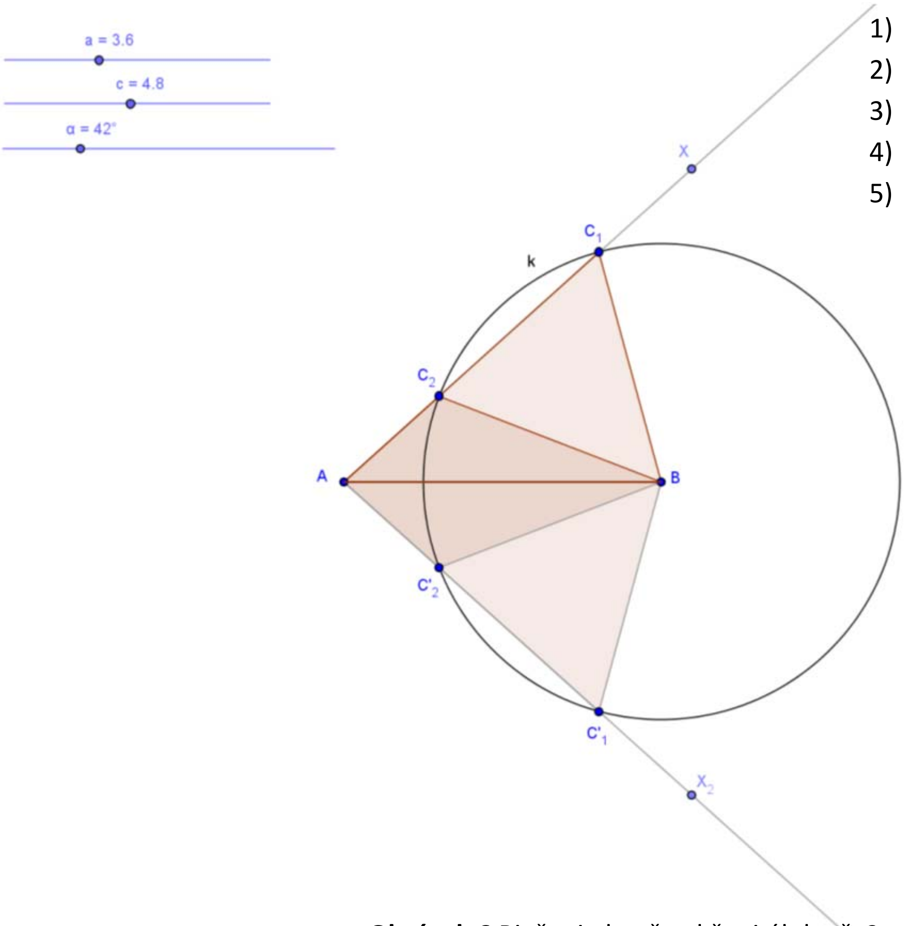
Úloha 2

Zostrojte Δ ABC, ak poznáte dĺžku strán a, c a veľkosť vnútorného uhla α pri vrchole A.

Riešenie:

Rozbor: 1) Ľubovoľne zvolíme úsečku **AB**, **|AB| = c** a hľadáme vrchol **C**
2) Poznáme uhol **α** pri vrchole **A**, preto bod **C** leží na polpriamke **→AX** tak , že **|∢ BAX | = α**
3) Vzdialenosť bodu **C** od bodu **B** je **|BC| = a**, preto vrchol **C** je bodom kružnice **k(B, r = a)**
4) Bod **C** je priesečníkom **→AX** s kružnicou **k**

Postup konštrukcie:
1) AB; |AB| = c
2) →AX ; | ∢ BAX | = α
3) k ; k(B, r = a)
4) C ; C € k ∩ →AX
5) ΔABC



Obrázok 6 Riešenie konštrukčnej úlohy č. 2

Diskusia :
Počet riešení závisí od počtu spoločných bodov kružnice **k** a polpriamky **→AX** .

Pre **0° < α < 90°**	a	**a < c. sin α**	úloha má 0 riešení
Pre **0° < α < 90°**	a	**a = c. sin α**	úloha má 2 riešenia
Pre **0° < α < 90°**	a	**c. sin α < a < c**	úloha má 4 riešenia
Pre **0° < α < 90°**	a	**a ≥ c**	úloha má 2 riešenia
Pre 90° < **α** < 180°		**a ≤ c**	úloha má 0 riešení
Pre 90° < **α** < 180°		**c < a**	úloha má 2 riešenia

Úloha 3

Zostrojte Δ ABC, ak poznáte dĺžku jeho strany c a veľkosti vnútorných uhlov α, β pri vrcholoch A, B.

Riešenie:

Rozbor: 1) Ľubovoľne zvolíme úsečku **AB**, **|AB| = c** a hľadáme vrchol **C**

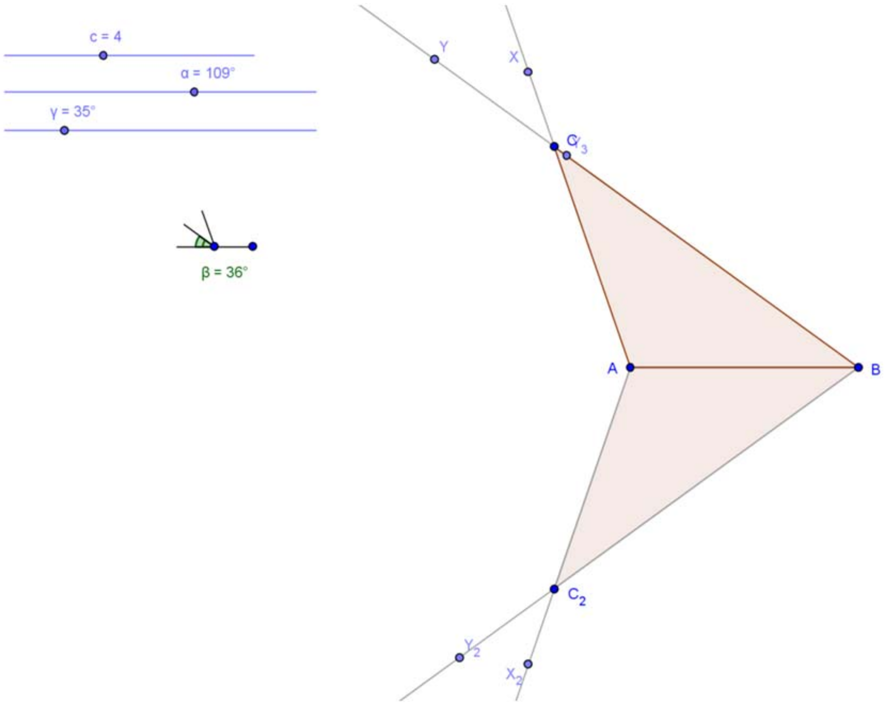
2) Poznáme uhol **α** pri vrchole **A** , preto bod **C** leží na polpriamke **→AX** tak , že **| ∢ BAX | = α**

3) Poznáme uhol **β** pri vrchole **B**, preto bod **C** leží na polpriamke **→ BY** tak, že **| ∢ ABY | = β**

4) Bod **C** je priesečníkom polpriamok **→AX** a **→ BY** .

Postup konštrukcie:

1) AB; |AB| = c
2) →AX ; | ∢ BAX | = α
3) → BY ; | ∢ ABY | = β
4) C ; C € →AX ∩ → BY
5) ΔABC



Obrázok 6 Riešenie konštrukčnej úlohy č. 3

Diskusia :

Počet riešení nezávisí na veľkosti strany **c** ani na veľkosti vnútorných uhlov **α**, **β** (pokiaľ α, β vyhovujú podmienke: α + β < 180° **)** . Riešenia sú vždy dve, zhodné.

ZÁVER

Matematika má vo vzdelávaní rozhodujúce postavenie - rozvíja myslenie žiakov, učí ich robiť analýzu aj syntézu, vyslovovať hypotézy a dokazovať ich správnosť. Učiteľ má kľúčové postavenie na vyučovacej hodine, dokáže matematiku urobiť zaujímavou, zábavnou, dokáže žiakov motivovať a priviesť k poznaniu, že svet a matematika sú úzko späté a nedajú sa oddeliť.

Pri zisťovaní úrovne matematickej gramotnosti našich žiakov práve úlohy z geometrie patrili k tým úlohám, ktoré žiaci ovládali na pomerne nízkej úrovni, s malou úspešnosťou zvládnutia. To je dôvod na hľadanie cesty, ako sprístupniť a uľahčiť vzdelávanie v geometrii.

Som presvedčená, že matematickú úlohu robí zaujímavou a peknou nielen výsledok, ale predovšetkým samotné riešenie, keď sa s nejakou úlohou trápime, nemusíme vždy prísť k výsledku, ale ostane v nás príjemný, dobrý pocit z objavovania. Matematika je vpletená do nášho života, sveta okolo nás a potešenie z matematiky, to je zážitok prvého objavu, údivu dieťaťa z nájdenia, ktoré doteraz nepoznal. Riešenie trojuholníka, jeho konštrukcia, vlastnosti v spojení s programami dynamickej geometrie, môžu byť pre žiaka vstupnou bránou k objavovaniu.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

Sitárová E. 1997 *Matematika pre 1. ročník gymnázia*: SPN Bratislava 1997, 314 s.

Šedivý, O., a kol. 1999 *Matematika pre 6. ročník základných škôl - 2.časť.*: SPN Bratislava 1999, 144 s., ISBN 80-08-02678-2

Šedivý, O. a kol. 2000 *Matematika pre 7. ročník základných škôl - 2.časť.*: SPN Bratislava. 2000, 159 s. ISBN 80-08-02680-4

Šedivý, O., a kol. 2000 *Matematika pre 8. ročník základných škôl -1. časť.*: SPN Bratislava. 2000, 143 s., ISBN 80-08-03031-3

Školský vzdelávací program Piaristického gymnázia sv. Jozefa Kalazanského, Nitra, Učebné osnovy z matematiky

Hohenwarter, M., Preiner, J., *Manuál GeoGebra - nápověda*. dostupné na http://www.geogebra.org/help/docusk/index.html, citované dňa 11. 4. 2013

ADRESA AUTORA

Mgr. Katarína Čurillová
Piaristické gymnázium sv. Jozefa Kalazanského
Piaristická 6
949 01 Nitra
curillovakatka@centrum.sk