ZHODNÉ ZOBRAZENIA A GEOGEBRA V KONŠTRUKČNÝCH ÚLOHÁCH

KARIN FUSKOVÁ

ABSTRAKT

Práca je zameraná na riešenie konštrukčných úloh v rovine s využitím interaktívneho matematického programu GeoGebra. Jeho výhodou je voľná dostupnosť a bezplatnosť. Práca poukazuje na to, že žiaci, ktorí využívajú geometrické softvéry, môžu dopĺňať vlastnú predstavivosť dynamickou manipuláciou s geometrickými objektmi a dokážu ľahšie vytvárať stratégie, preverovať hypotézy, zisťovať podmienky riešiteľnosti a počet vyhovujúcich riešení. Takto dochádza u žiakov ku rozvíjaniu tvorivosti, nápaditosti a predstavivosti. Zároveň sa žiaci učia formovať otázky, hľadať vzťahy, argumentovať, otvorene komunikovať, spolupracovať, verifikovať výsledky a aj ceniť chyby. V práci je uvedená teória zhodných zobrazení a konštrukčné úlohy riešené pomocou zhodných zobrazení v rovine s využitím programu GeoGebra. Cieľom práce je vzbudiť u žiakov záujem o matematiku prostriedkami interaktívneho geometrického systému a pestovať v nich lásku k matematike.

ÚVOD

V prírode a v každodennom živote sa stretávame so zhodnými zobrazeniami a so zhodnými útvarmi. Napríklad mnohobunkové živočíchy sa rozdeľujú na živočíchy lúčovito súmerné – oddelenie dvojlistovce a živočíchy s dvojstrannou súmernosťou tela – oddelenie trojlistovce. Kvety rastlín môžu byť súmerné podľa jednej roviny, alebo lúčovito súmerné podľa niekoľkých rovín. Ďalším príkladom sú tlačené písmená abecedy : A, C, D, E, M, T, U, V, Y sú osovo súmerné, N, Z sú stredovo súmerné a I, H, O, X sú osovo aj stredovo súmerné. Mnohé predmety našej dennej potreby sú osovo súmerné - zubná kefka, poháre, taniere, panvice, niektoré druhy príboru. Príklady nájdeme aj v zariadení bytov a domov, napríklad osovo súmerné môžu byť stoličky, stoly, skrine, postele, svietidlá. V športe sú osovo aj stredovo súmerné mnohé športové ihriská. Osovo súmerné sú futbalové a hokejové brány, stolnotenisový stôl, lopty, tenisové rakety, niektoré druhy lyží.

Žiaci si túto skutočnosť uvedomujú a ľahko pochopia a naučia sa teóriu zhodných zobrazení. Problém nastáva pri aplikácii príslušných teoretických poznatkov v konštrukčných úlohách, pretože sa v nich nedá uplatniť univerzálny algoritmus riešenia. Často aj jednoduché konštrukčné úlohy buď nevedia vyriešiť, alebo ich riešia neúplne. Majú aj skromnú zručnosť v konštruovaní. Treba ich viesť ku presnosti v rysovaní, trpezlivosti a dôslednosti, čo je užitočné aj v praktickom živote. Mali by riešiť dostatočné množstvo úloh rôzneho typu, aby sa naučili samostatnosti v riešení a aby sa rozvíjala ich tvorivosť. Ak sú žiakom zadávané iba úlohy analogického typu, žiaci ich síce ľahšie zvládajú, ale riešenie sa stáva stereotypnou prácou, ktorá nie je motivujúca a nerozvíja tvorivosť a intelekt žiakov.

Je vhodné podľa možností a materiálno-technického vybavenia školy využívať pri výučbe geometrie nielen tabuľu, rysovacie pomôcky, prípadne spätný projektor a fólie, ale aj rôzne výukové programy, ako napríklad Planéta vedomostí (komplexný elektronický vzdelávací systém pre základné a stredné školy pokrývajúci hlavné predmety – matematika, fyzika, chémia, biológia a prírodoveda), alebo geometrické softvéry Cabri geometria, GeoGebra, Planimetrik, Cinderella, Euklides, WinGeom a iné. Niektoré z nich (napríklad maďarský Euklides) nemajú dostupné verzie v slovenskom jazyku a zatiaľ sa dá stiahnuť ich demo verzia (program, ktorý funguje iba čiastočne a má blokované niektoré funkcie) iba v anglickom jazyku. Programy, ktoré slúžia na vyučovanie a prácu s dynamickou geometriou, sa líšia najmä spôsobom ovládania, systémom vytvárania objektov a tiež prácou s nimi. Je efektívnejšie pracovať s jedným uceleným programom, než s viacerými rôznymi aplikáciami. Takto sa vyhneme chybám, nejednotnosti a neporiadku. V slovenských školách patria medzi najčastejšie využívané geometrické softvéry Cabri geometria a GeoGebra.

Zavádzaním výpočtovej techniky do procesu vyučovania sa zvyšuje efektivita vzdelávania. Žiaci už nie sú odkázaní na rysovanie statických obrázkov a dopĺňanie dynamiky vlastnou predstavivosťou. To robí mnohým, hlavne menej schopným žiakom značný problém. Dnes geometrické softvéry umožňujú zostrojovanie konštrukcií, v ktorých sa geometrické objekty dynamicky menia. Môžeme nimi rôzne manipulovať. Napríklad môžeme meniť ich polohu, veľkosť, tvar. Prehľadnosť konštrukcií sa dá docieliť aj farebným rozlišovaním bodov a čiar.

Žiaci, ktorí využívajú geometrické softvéry, môžu v riešení úloh rôzne experimentovať. Napríklad preverovať hypotézy, vytvárať stratégie, zisťovať podmienky riešiteľnosti úlohy a počet vyhovujúcich riešení. Takto dochádza ku rozvíjaniu ich predstavivosti, nápaditosti a tvorivosti.

Úlohy na zhodné zobrazenia v rovine, ktoré uvádzam, sú riešené pomocou programu GeoGebra. Jeho výhodou je, že je voľne dostupný a bezplatný. Umožňuje spracovanie úloh z geometrie, algebry aj matematickej analýzy. Objekt v geometrickom okne zodpovedá výrazu v algebrickom okne a naopak. Dajú sa v ňom priamo zadávať rovnice a súradnice. Je dosť rozšírený a na internete má rozsiahle archívy riešených úloh. V Rakúsku, Nemecku i v ďalších európskych krajinách získal mnoho ocenení.

ZHODNÉ ZOBRAZENIA V ROVINE

ZHODNÉ ZOBRAZENIE

„ Zobrazenie Z v E^2 sa nazýva zhodným zobrazením v E^2 práve vtedy, keď pre každé dva body X, Y $\in$ E^2 a ich obrazy X´= Z(X), Y´= Z(Y) platí : $|X'Y'| = |XY|$.

Body roviny, ktoré zobrazujeme, nazývame vzory a body, do ktorých sa body zobrazili, nazývame obrazy. “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 185)

„ Zápis zhodného zobrazenia : Z : X $\rightarrow$X´, X´= Z(X)

Útvar U_1 je zhodný s útvarom U_2 práve vtedy, keď existuje aspoň jedno zhodné zobrazenie, ktoré zobrazuje útvar U_1 na útvar U_2 . “ (Rácová, 1995, s. 66)

„ Samodružný (invariantný) bod zobrazenia Z je bod, ktorý sa zobrazí sám do seba :

X = Z(X) = X´

Samodružný útvar v zobrazení Z je taký útvar U, ktorý sa zobrazí sám do seba :

U = Z(U) = U´

Zhodné zobrazenia v rovine sú:

- identita
- osová súmernosť
- stredová súmernosť
- posunutie
- otočenie
- posunutá súmernosť “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 185)

VLASTNOSTI ZHODNÝCH ZOBRAZENÍ

„ Každé zhodné zobrazenie v rovine je prosté. Každé zhodné zobrazenie možno zložiť najviac z troch osových súmerností.

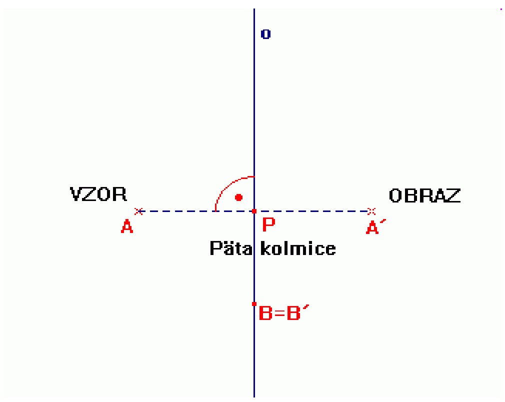
Zhodné zobrazenie je priama zhodnosť, ak nemení orientáciu trojuholníka. Vznikne zložením párneho počtu osových súmerností.

Zhodné zobrazenie je nepriama zhodnosť, ak mení orientáciu trojuholníka. Vznikne zložením nepárneho počtu osových súmerností. “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 185)

OSOVÁ SÚMERNOSŤ S OSOU o

„ Zápis : S_o

Je zhodné zobrazenie, ktoré každému bodu $X \in o$ priradí bod $S_o(X) = X$ a každému bodu $X \notin o$ priradí bod $S_o(X) = X´$ tak, že XX´ je kolmé na o a stred úsečky XX´ leží na o. Osová súmernosť je jednoznačne daná osou súmernosti alebo dvojicou vzor – obraz. “ (Rácová, 1995, s. 66)



Samodružnými bodmi sú body osi . Priamka kolmá na os je samodružným útvarom.

IDENTITA

„ Zápis : I

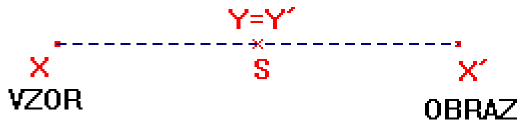
Vznikne zložením dvoch osových súmerností, ktorých osi splývajú : $o_1 = o_2$, I =$S_{O1} \circ S_{O2}$. Každý bod roviny sa v identite zobrazí sám do seba. “ (Rácová, 1995, s. 66)

STREDOVÁ SÚMERNOSŤ SO STREDOM S

„ Zápis : S_S

Vznikne zložením dvoch osových súmerností S_{O1}, S_{O2}, ktorých osi o_1, o_2 sú na seba kolmé. Priesečník osí je stred súmernosti. $S_S = S_{O1} \circ S_{O2}$, $S = o_1 \cap o_2$, $o_1 \perp o_2$ “ (Rácová, 1995, s. 67)

S_S je zhodné zobrazenie, ktoré každému X = S priradí bod $S_S(X) = X$ a každému bodu $X \neq S$ priradí bod $X' = S_S(X)$ tak, že $|SX'| = |SX|$ a X´ leží na polpriamke opačnej k polpriamke SX. Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom S, alebo dvojicou vzor- obraz, alebo osami $o_1 \perp o_2$.



„ Samodružný bod je len stred S. Samodružné priamky sú priamky prechádzajúce stredom S. “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 186)

POSUNUTIE (TRANSLÁCIA)

„ Zápis : T, $T_{AB}(X)$

Posunutie je jednoznačne určené : 1. rovnobežnými osami alebo

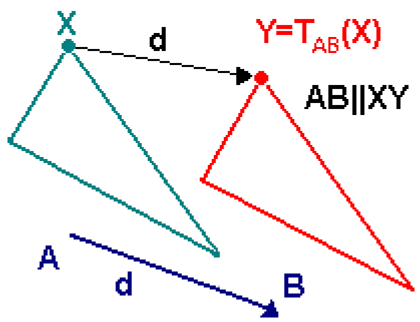
2. dvojicou vzor- obraz “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 186)

1.Posunutie určené rovnobežnými osami

„ Vznikne zložením dvoch osových súmerností, ktorých osi sú rovnobežné a rôzne. $T = S_{O1} \circ S_{O2}$, $o_1 \parallel o_2$. Translácia je zhodné zobrazenie, ktoré bodu X priradí bod $X' = T(X)$ tak, že platí $|XX'| = 2d$, d je vzdialenosť osí o_1, o_2 a XX´ je kolmé na o_1, o_2. Vzdialenosť $|XX'|$ sa nazýva veľkosť posunutia a priamka XX´ určuje smer posunutia. “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 186)

2. Posunutie určené dvojicou vzor - obraz

V rovine je daná usporiadaná dvojica bodov [A;B] (orientovaná úsečka AB). Translácia určená orientovanou úsečkou AB je také zhodné zobrazenie v rovine, ktoré bodu X priradí bod X´ tak, že orientované úsečky AB a XX´ sú rovnako veľké a súhlasne orientované. Orientovaná úsečka AB určuje smer a veľkosť posunutia.



„ Posunutie nemá žiaden samodružný bod. Samodružné priamky sú priamky rovnobežné so smerom posunutia. “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 186)

OTOČENIE (ROTÁCIA)

„ Zápis : $R_{S,\alpha}$

Rotácia vznikne zložením dvoch osových súmerností, ktorých osi sú navzájom rôznobežné. $R_{S,\alpha} = S_{O1} \circ S_{O2}$, $o_1 \times o_2$, $S = o_1 \cap o_2$.

S je stred otočenia. α je uhol otočenia. Jeho veľkosť je dvojnásobkom uhla osí o_1, o_2. “ (Rácová, 1995, s. 67)

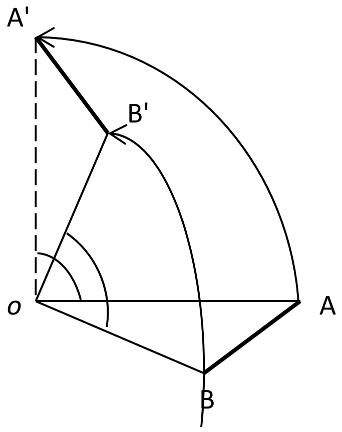
„ Rotácia $R_{S,\alpha}$ priradí každému bodu X = S bod $R_{S,\alpha}(X) = S$ a každému bodu $X \neq S$ priradí bod $R_{S,\alpha}(X) = X'$ tak, že $|SX'| = |SX|$ a $|\sphericalangle XSX'| = \alpha$. “ (Rácová, 1995, s. 68)

Uhol môže byť kladný alebo záporný.

„ Ak α > 0, tak otáčame proti pohybu hodinových ručičiek, t.j. v kladnom zmysle.

Ak α< 0, tak otáčame v smere pohybu hodinových ručičiek, t.j. v zápornom zmysle. “ (Rácová, 1995, s. 68)

„ Rotácia je jednoznačne určená stredom a uhlom otočenia alebo rôznobežnými osami. “ (Richtáriková, Kyselová, 2003, s. 186)



Jediným samodružným bodom otočenia je bod S.

POSUNUTÁ SÚMERNOSŤ

„ Zápis : P

Vznikne zložením troch osových súmerností, ktorých osi nepatria tomu istému zväzku priamok (napríklad zložením stredovej a osovej súmernosti). Nemá nijaký samodružný bod ani priamku. “ (Rácová, 1995, s. 68)

RIEŠENÉ ÚLOHY

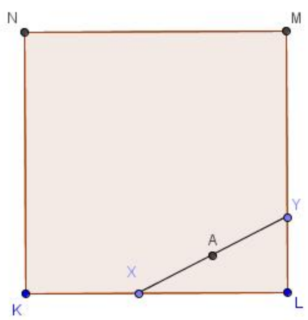
Úloha 1

Daný je štvorec KLMN a jeho vnútorný bod A. Zostrojte všetky úsečky XY tak, aby bod A bol ich stredom a krajné body X, Y ležali na stranách štvorca. Rácová (1995, s. 69)

Úlohu riešte v programe GeoGebra. Následne vykonajte konštrukciu pomocou rysovacích pomôcok do zošitov.

Riešenie:

Náčrt:



Rozbor: C = KLMNK, X∈ C, Y∈ C, $|AX| = |AY|$, S_A: X→Y, S_A: C→C_1 ,Y∈ $C_1 \cap C$

Postup konštrukcie: 1. □ KLMN, A

2. C, C = KLMNK

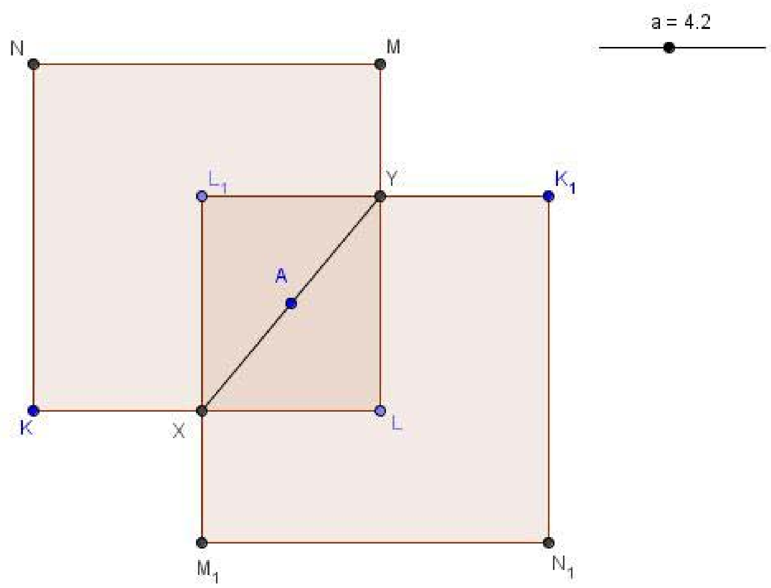
3. C_1, S_A: C→ C_1

4. Y, Y∈ $C_1 \cap$ C

5. X, S_A: Y→ X

6. XY

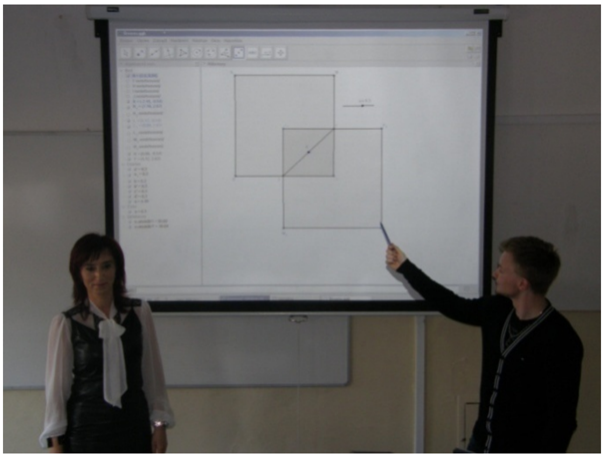
Konštrukcia:



Obrázok 1 Konštrukcia úlohy 1

Skúška: Overíme, či zostrojená úsečka XY má požadované vlastnosti: X∈ C, Y∈ C, A je stred XY.

Diskusia: Úloha má jedno riešenie.



Obrázok 2

Hodina matematiky- riešenie úlohy 1

Obrázok 3

Hodina matematiky- riešenie úlohy 1

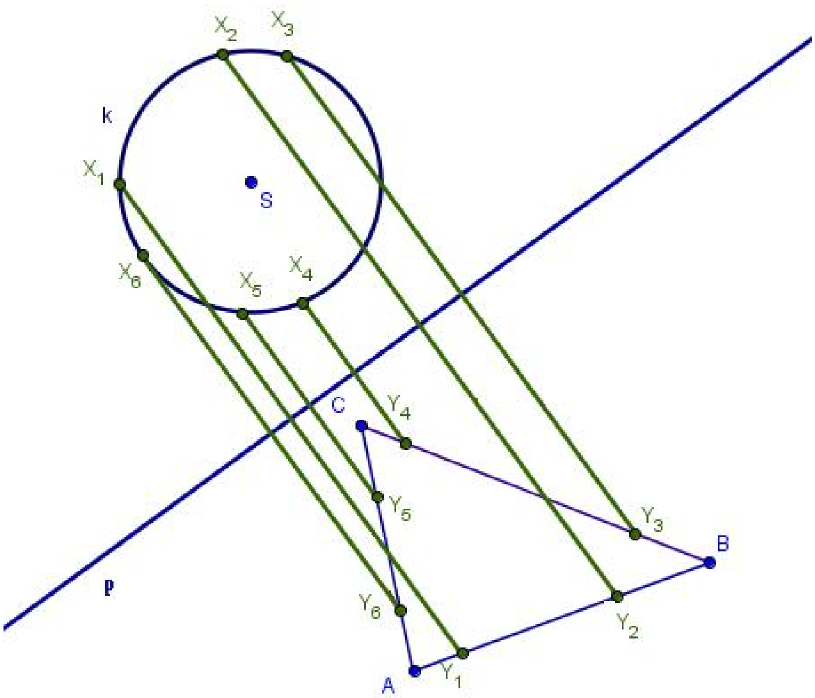
ÚLOHA 2

Daná je priamka p, kružnica k a trojuholník ABC. Zostrojte všetky úsečky XY tak, že X leží na k, Y na obvode trojuholníka ABC, úsečka XY je kolmá na p a stred úsečky XY leží na priamke p.

Úlohu riešte v programe GeoGebra. Následne vykonajte konštrukciu pomocou rysovacích pomôcok do zošitov.

Riešenie:

Náčrt:



Rozbor: X∈ k, Y∈ obvodu Δ ABC, XY ⊥ p, stred XY leží na p, S_p: X→Y, S_p: k →k´, Y∈ k´∩ Δ ABC

Postup konštrukcie: 1. k, p, Δ ABC

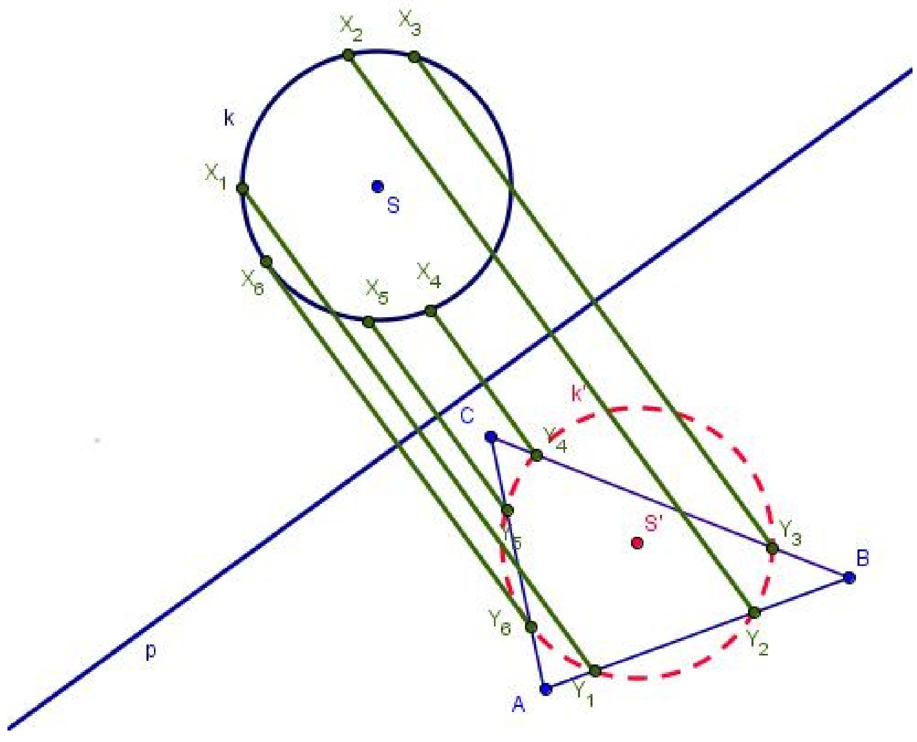
2. k´, S_p: k →k´

3. Y, Y∈ k´∩ Δ ABC

4. X, S_p: Y→X

5. XY

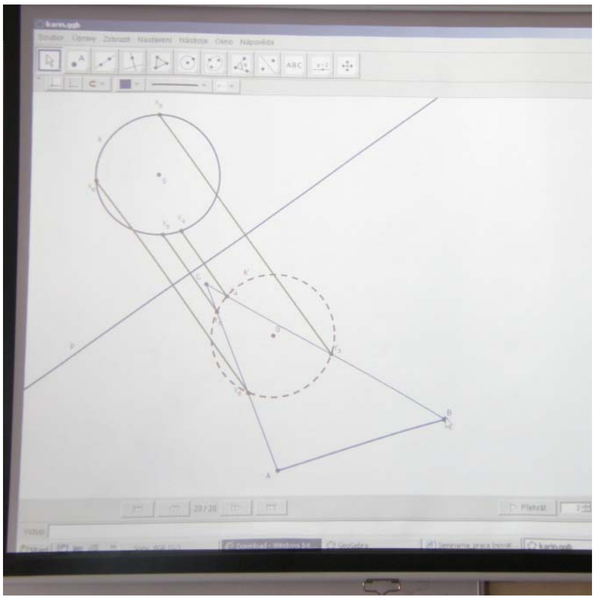
Konštrukcia:



Obrázok 4 Koštrukcia úlohy 2, Zdroj: Mlynarčíková, dostupné na www.mlynarcikova-gpohkk.yw.sk

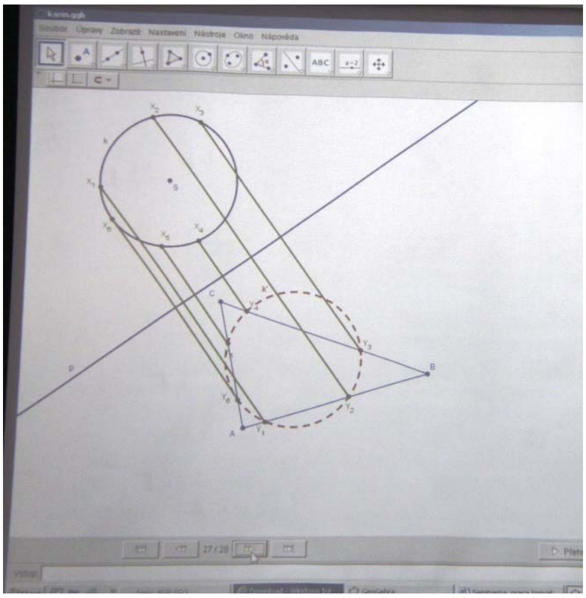
Skúška: Overíme, či zostrojená úsečka XY má požadované vlastnosti: X∈ k, Y∈ obvodu Δ ABC, stred XY leží na p, XY ⊥ p.

Diskusia: Počet riešení závisí od k´∩ Δ ABC.



Obrázok 5

Hodina matematiky- riešenie úlohy 2



Obrázok 6

Hodina matematiky- riešenie úlohy 2

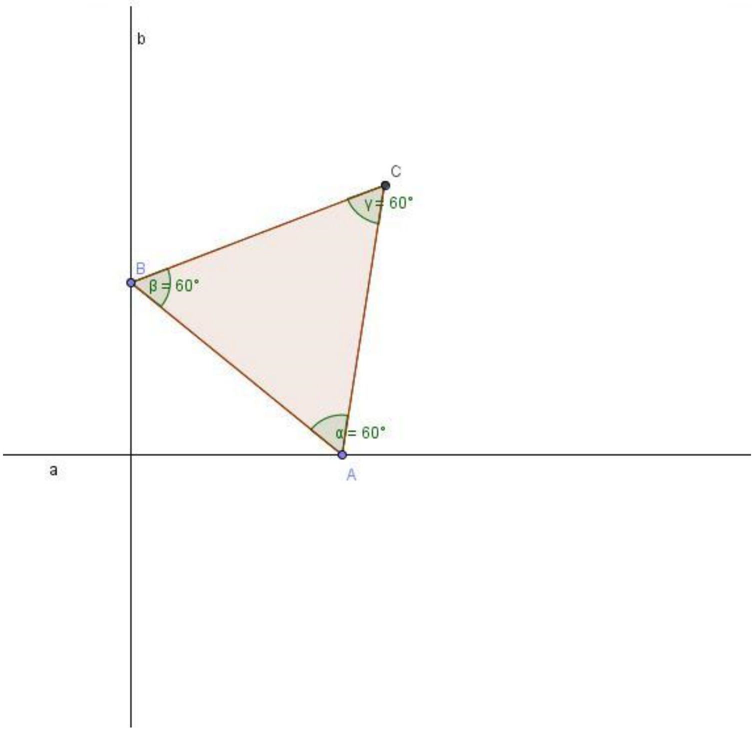
Úloha 3

Dané sú dve navzájom kolmé priamky a, b a bod C, ktorý na nich neleží. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby A∈ a, B∈ b.

Úlohu riešte v programe GeoGebra. Následne vykonajte konštrukciu pomocou rysovacích pomôcok do zošitov.

Riešenie:

Náčrt:



Rozbor: |

AB |= |BC |= |AC |, | $\sphericalangle CAB$ |= |$\sphericalangle ABC$ |= |$\sphericalangle BCA$ |=60°, $R_{C,60°}$: B→A, $R_{C,60°}$: b →b´, A∈ b´ ∩ a.

Postup konštrukcie: 1. a, b, C

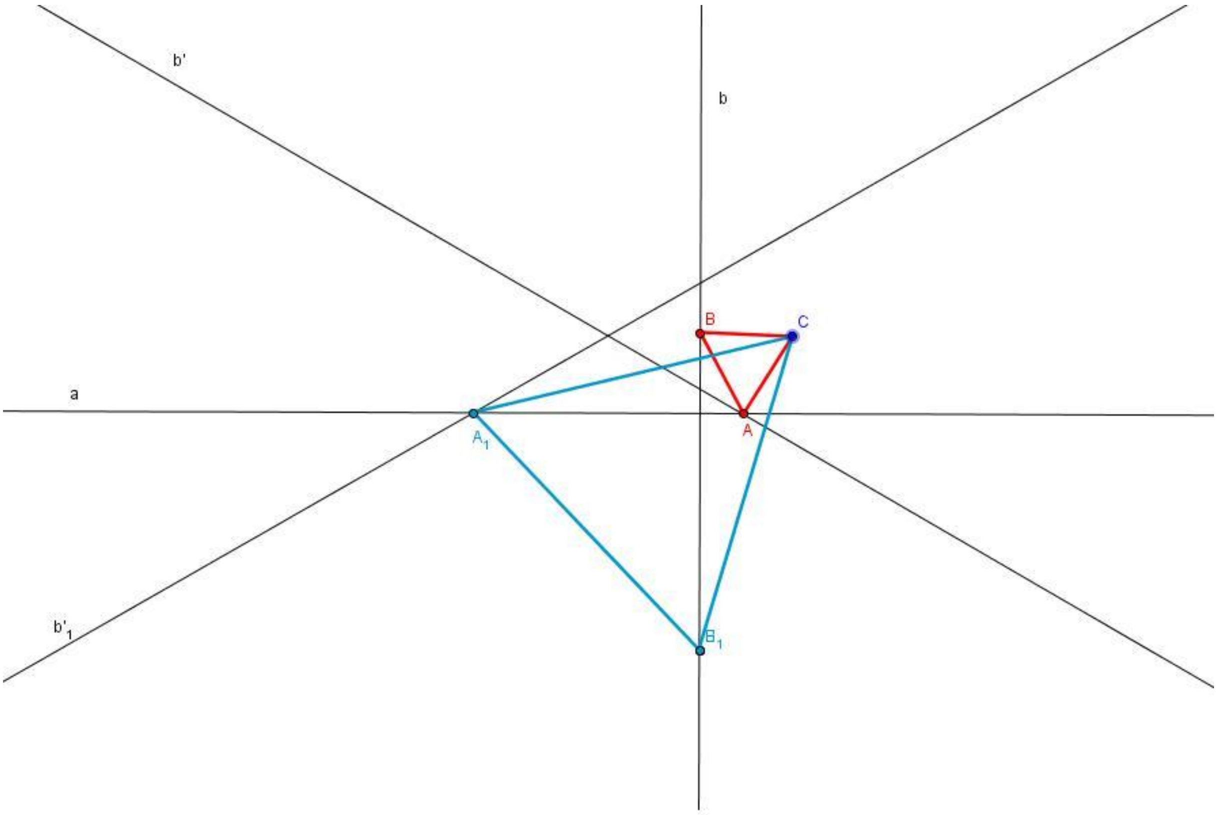
2. b´, $R_{C,60°}$: b →b´

3. A, A∈ b ´∩ a

4. B, $R_{C,-60}$: A→B

5. Δ ABC

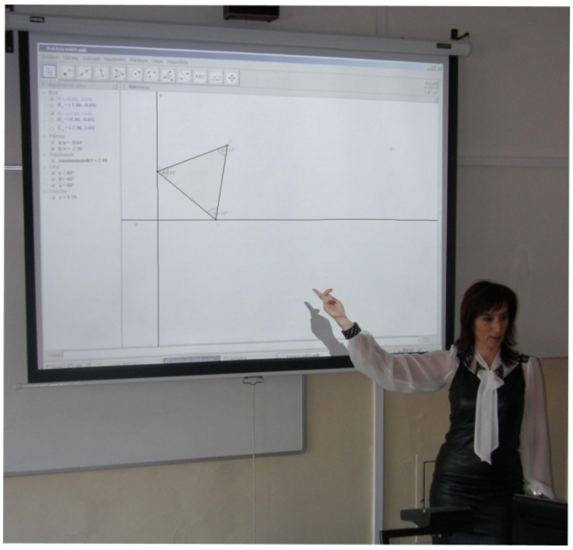
Konštrukcia:



Obrázok 7 Konštrukcia úlohy 3

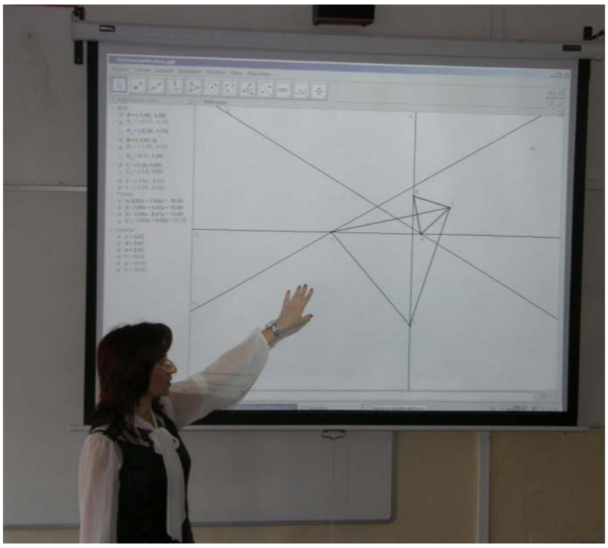
Skúška: Overíme, či zostrojený trojuholník ABC má požadované vlastnosti : | AB |= |BC |= |AC |, A∈ a, B∈ b.

Diskusia: Úloha má dve riešenia (jedno riešenie v jednom otočení).



Obrázok 8

Hodina matematiky- riešenie úlohy 3



Obrázok 9

Hodina matematiky- riešenie úlohy 3

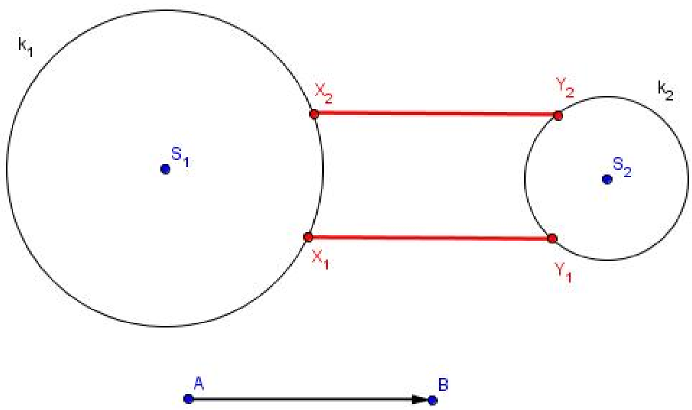
Úloha 4

Dané sú kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a dva rôzne body A, B. Zostrojte úsečku XY rovnobežnú s priamkou AB tak, aby $X \in k_1$, $Y \in k_2$ a $|XY| = |AB|$.

Úlohu riešte v programe GeoGebra. Následne vykonajte konštrukciu pomocou rysovacích pomôcok do zošitov.

Riešenie:

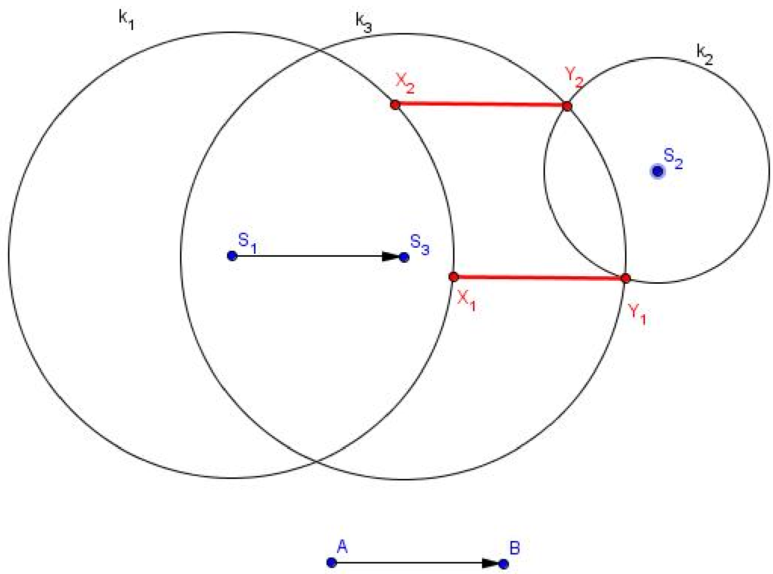
Náčrt:



Rozbor: $X \in k_1$, $Y \in k_2$, $|XY| = |AB|$, $XY \parallel AB$, $T_{AB}: X \to Y$, $T_{AB}: k_1 \to k_1'$, $Y \in k_1' \cap k_2$

Postup konštrukcie:
1. $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, A, B
2. k_3, $T_{AB}: k_1 \to k_3$
3. Y, $Y \in k_3 \cap k_2$
4. X, $T_{BA}: Y \to X$
5. XY

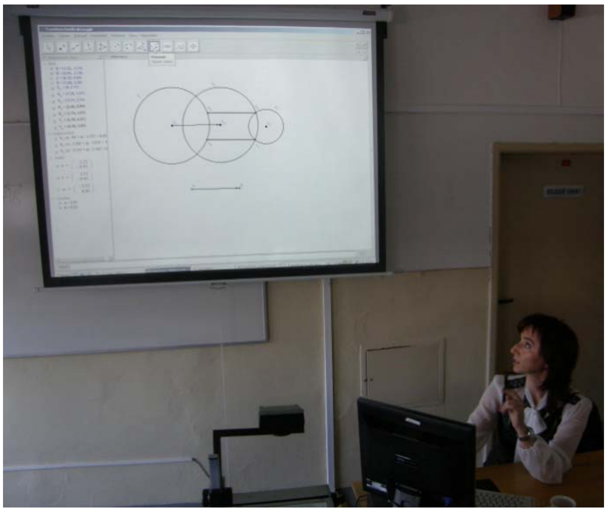
Konštrukcia:

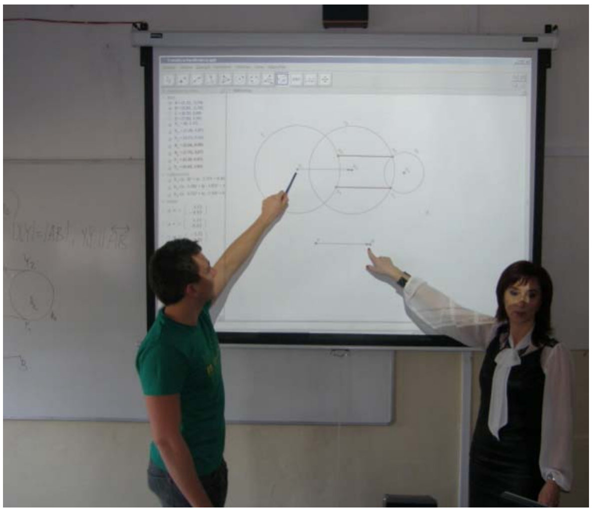


Obrázok 10 Konštrukcia úlohy 4

Skúška: Overíme, či zostrojená úsečka XY má požadované vlastnosti: $X \in k_1$, $Y \in k_2$, $|XY| = |AB|$, $XY \parallel AB$.

Diskusia: Počet riešení závisí od $k_3 \cap k_2$.





Obrázok 11

Hodina matematiky- riešenie úlohy 4

Obrázok 12

Hodina matematiky- riešenie úlohy 4

ZÁVER

Na vyučovacích hodinách odporúčam kombinovať konštrukcie s využitím programu GeoGebra s klasickým rysovaním pomocou rysovacích pomôcok. Takto si žiaci osvoja prácu s dynamickým geometrickým programom a naučia sa aj manuálnej zručnosti, sústredenosti a presnosti v rysovaní.

Problémom je, že na väčšine škôl materiálno-technické vybavenie neumožňuje každému žiakovi samostatne pracovať na hodinách matematiky na počítači. Takto pracujú iba na hodinách informatiky, programovania, alebo na krúžkoch výpočtovej techniky. Uvedený spôsob vyučovania sa dá realizovať napríklad na delených hodinách matematiky. Alternatívou je, že učiteľ pracuje na počítači a žiaci sledujú konštrukciu premietanú na plátno a súčasne rysujú do zošitov (príloha obrázky 5 až 12).

Učiteľ nesmie hneď prezradiť správne riešenie. Žiaci by zostali pasívnymi akceptormi. Mal by prejsť z pozície informátora do úlohy konzultanta, poradcu a partnera žiaka. Mal by vždy vytvoriť priestor na diskusiu, vyslovovanie a overovanie hypotéz. Mal by žiakov viesť ku vyriešeniu problému, sformovaniu záveru a následnému zosumarizovaniu. V tomto heuristickom procese žiaci bádajú, objavujú, slobodne tvoria nápady, formujú otázky, hľadajú vzťahy, vytvárajú stratégie, učia sa spôsobom overovania, argumentácie, otvorenej komunikácie, spolupráci, verifikácii výsledkov a aj ceneniu chýb. Rozvíja sa ich kritické myslenie, dôvtip, samostatnosť a poznávacie schopnosti. Neuspokojujú sa iba s jedným postupom, ale hľadajú ďalšie spôsoby, neobvyklé, nové, jednoduchšie alebo kratšie riešenia.

Veľmi dôležitá je pritom kultúra triedy, osobnosť učiteľa a jeho pôsobenie na žiakov. Motiváciou je samotné riešenie problému, ale aj očakávanie hodnotenia. Ako pozitívna motivácia pôsobí povzbudenie žiaka počas hľadania riešenia, po vyriešení pochvala, ale aj radosť učiteľa zo záujmu žiakov a zo správneho riešenia úloh. Potom sa aj žiaci nehanbia prejavovať radosť z riešenia a tešia sa z dosiahnutých výsledkov.

„Motivácia vo vyučovaní je výzva k tvorivosti. Vzrušujúca objaviteľská činnosť začala formovať psychiku človeka tak, že v nej samej zakorenila túžba po silných intelektuálnych zážitkoch, ktoré človeku poskytuje odhaľovanie matematických zákonitostí. Táto skutočnosť napomáha pestovaniu lásky k matematike." (Fulier, Šedivý, 2001, s.11).

A práve to by malo byť poslaním učiteľa matematiky. Navodiť tvorivú klímu (napríklad aj prostriedkami interaktívnych geometrických systémov), vzbudiť u žiakov záujem a pestovať v nich lásku k matematike.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

Fulier, J., Šedivý, O. 2001. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. Fakulta prírodných vied UKF v Nitre. 2001, 269 strán, ISBN 80-8050-445-8

Mlynarčíková M.: Planimetria- elektronická zbierka úloh, Zhodné a podobné zobrazenia v konštrukčných úlohách, dostupné na http://www.mlynarcikova-gpohkk.zw.sk

Rácová, M. 1995. *Matematika- prehľad stredoškolského učiva pre maturantov a uchádzačov o štúdium na vysokých školách*. Enigma Bratislava. 1995, 241 strán, ISBN 80-967190-7-6

Richtáriková, S., Kyselová, D. 2003. *Matematika- pomôcka pre maturantov a uchádzačov o štúdium na vysokých školách.* Enigma Nitra. 2003, 312 strán, ISBN 80-85471-61-2

ADRESA AUTORA

Mgr. Karin Fusková
Piaristické gymnázium sv. J. Kalazanského
Piaristická 6
949 01 Nitra
karin@meb.sk