HODNOTENIE ÚROVNE KOMBINATORICKÉHO MYSLENIA ŽIAKOV ZÁKLADNEJ ŠKOLY

KATARÍNA HALAJOVÁ

ABSTRACT

Combinatorics can be very attractive to students in mathematics. Combinatorial problems usually provide several possible solutions, encourage creative thinking of students, connect real life with mathematics and often lead to amazing results. In this paper we analyze the solutions of pupils in 5th, 7th and 9th class and try to determine their level of combinatorial thinking by the process solution of combinatorial tasks.

ÚVOD

Kombinatorika, pri vhodnom podaní, môže byť pre žiakov veľmi atraktívnou oblasťou matematiky. Kombinatorické úlohy väčšinou poskytujú viaceré možnosti riešenia, nie je nutné ísť nalinajkovanou cestou. Aj slabší žiaci majú možnosť byť úspešní. Úlohy podporujú tvorivé myslenie žiakov, spájajú reálny život s matematikou, často vedú k úžasným výsledkom – ak napríklad zabudnem dve čísla zo štvorciferného PIN-kódu, ponúka sa mi až sto rôznych možností.

V práci budeme analyzovať riešenia žiakov a pokúsime sa určiť úroveň ich kombinatorického myslenia na základe postupu riešenia kombinatorických úloh. Žiaci 5., 7. a 9. ročníka riešili kombinatorické úlohy, námet na ne sme prevzali z učebnice matematiky pre 7. ročník. Piataci dostali len zadanie 1. úlohy, siedmaci 1. a 2. úlohu a deviataci všetky tri. Úlohy postupne gradovali, z reálnej situácie sa prešlo na matematickú a zväčšoval sa počet prvkov.

KOMBINATORIKA

„Kombinatorika nie je uzavretá časť matematiky, ktorá sa musí prezentovať iba v jednom tematickom celku. Jej elementy sa objavujú alebo by mohli byť zaradené do väčšiny tém školskej matematiky." (Scholtzová, 2004 str. 6)

V súčasných učebniciach matematiky sú zaradené úlohy z kombinatoriky takmer vo všetkých ročníkoch druhého stupňa pri rôznych tematických celkoch. Žiaci nie sú vyslovene upozornení na to, že riešia úlohy z kombinatoriky. To im dáva väčšiu možnosť pristupovať k riešeniu tvorivo.

Primas
PROMOTING INQUIRY IN MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION ACROSS EUROPE
SEVENTH FRAMEWORK PROGRAMME

Rosenstein (in Scholtzová, 2004) formuloval základné zručnosti z diskrétnej matematiky vzhľadom na vek žiaka, pre kombinatoriku z toho vyplýva nasledovné.

Desaťročný žiak by mohol:

- vedieť vytvoriť súbor všetkých možných prípadov jednoduchých situácií (napr. aké sú možnosti obliecť sa, ak máme tri klobúky a dva kabáty) ;
- vedieť, že mapa ulíc môže byť prezentovaná grafom a že chodníky sú hrany v grafe;
- rozumieť, že násobenie je opakované pripočítavanie toho istého čísla;
- vedieť, že vzory na ozdobnej dlážke vznikajú opakovaním malého vzoru, že rady vzorov v borovicovej šuške sú výsledkom jednoduchého matematického pravidla;
- vedieť zaradiť informácie do tabuliek, stromových grafov alebo diagramov;
- vedieť vykonať inštrukcie ako sa dostať od jedného miesta k inému.

Pätnásťročný žiak by mal:

- vedieť systematicky vypisovať a určiť počet vybraných objektov konečnej množiny;
- vedieť určiť počet všetkých možných ciest na mape od jedného mesta k druhému;
- vedieť nájsť cenovo priaznivé cesty (najkratšie cesty) spájanie sídiel do siete použitím vetviaceho stromu;
- vedieť skúmať jednoduché opakované vzory (mozaiky) a vytvárať ich;
- byť schopný čítať, konštruovať a analyzovať tabuľky, matice, mapy a iné dátové štruktúry;
- byť schopný naplánovať najvhodnejšiu cestu pre skupinový výlet;
- vedieť popísať presné inštrukcie pre sčítanie dvoch dvojciferných čísel.

Vzhľadom na uvedené zručnosti sme mohli zadať kombinatorickú úlohu aj žiakom 5. ročníka.

ÚROVNE KOMBINATORICKÉHO MYSLENIA

„Kombinatorické myslenie je budované na schopnosti organizovať prvky množiny do prehľadných tabuliek, grafov, schém a zoznamov.“ (Hejný, in Scholtzová, 2004, str. 5) Jeho súčasťou je aj schopnosť vytvárať abstraktný model a zručnosť hľadania organizačného princípu.

Podľa Bálinta (in Scholtzová, 2004) je vhodné na elementárnej úrovni postupovať pri vyučovaní kombinatoriky takto:
1. Žiaci hľadajú najprv jednu, potom niekoľko možností, napr. číslo, slovo, cestu. Takto učiteľ môže zistiť, či pochopili podmienky a vedia, čo treba hľadať.
2. Hľadajú čím viac rôznych možností riešenia úlohy.
3. Hľadajú všetky možnosti riešenia úlohy. Žiakom by malo byť jasné, že našli všetky možnosti, To je možné vtedy, ak žiaci objavia určitý poriadok v možnostiach.
4. Žiaci nemusia vidieť všetky možnosti, ale len „poriadok v nich“ a na základe toho usudzujú, aké bude pokračovanie a koľko bude riešení.
5. Nie je už potrebné, aby žiaci vymenovali všetky prípady, lebo z analýzy podmienok vedia vypočítať všetky možnosti.

Kombinatorické myslenie má 4 úrovne (Fischbein & Grossman, 1997):
Úroveň 1 - žiak je schopný vymenovať prvky v náhodnom poradí, nehľadá systematickú stratégiu
Úroveň 2 - žiak pri riešení využíva metódu pokusu a omylu, pri práci s malým počtom prvkom objavuje určité postupy
Úroveň 3 – žiak pri riešení využíva vzorce alebo systematické vypisovanie prvkov
Úroveň 4 – žiak je schopný definovať rôzne kombinatorické princípy, napr. permutácie sú bijekcia na *n*-prvkovej množine

RIEŠENIE KOMBINATORICKÝCH ÚLOH

Kombinatorika je jednou z oblastí matematiky, v ktorej môžu uspieť aj slabší žiaci – na riešenie úloh veľakrát stačí jednoduchá aritmetika a algebra. Žiak má často na výber z viacerých možností riešenia – neexistuje iba jedna správna cesta, dôležité je dopracovať sa k správnemu výsledku. Úlohy sú v mnohých prípadoch stavané tak, že žiak má chuť skúmať a objavovať, poznať odpovede na otázky.

Scholtzová (2004) sformulovala Elementy riešenia úloh z kombinatoriky:

Element č. 1: Analýza textu a nadobudnutie vhľadu do situácie úlohy
Element č. 2: Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia
Element č. 3: Vymenovanie všetkých konfigurácií
Element č. 4: Propedeutika pre pravidlo súčinu
Element č. 5: Propedeutika pre pravidlo súčtu – umenie roztriediť
Element č. 6: Kedy sú dva objekty ,,rovnaké“ ?
Element č. 7: Grafické znázornenie
Element č. 8: Divergentné úlohy – rozvoj divergentného myslenia
Element č. 9: Usporiadanie versus neusporiadanie
Element č. 10: Prvky v objektoch – najviac raz, práv raz alebo aj viackrát?
Element č. 11: Organizácia a systém
Element č. 12: Interpretácia výsledku
Element č. 13: Vytvorenie úlohy

Žiak musí pochopiť zadanie úlohy, poznať význam slov najviac raz, práve raz, aspoň raz. Následne je potrebné zvoliť si vhodnú stratégiu riešenia, vedieť si odpovedať na otázky, či sú vymenované všetky prvky, či nejaký prvok nie je zduplikovaný, kedy sú dva prvky rovnaké. Pri riešení je veľkým prínosom systematické usporiadanie prvkov a schopnosť si úlohu graficky znázorniť. Divergentné myslenie žiaka mu umožňuje myslieť tvorivo. Vznikajú nové nápady a hypotézy, ktorých pravdivosť je potrebné potvrdiť alebo vyvrátiť. Keď sa žiak dopracuje k výsledku, mal by ho dokázať správne interpretovať, mal by vedieť, čo vlastne vypočítal. Ak žiak celý proces zvládol, mal by byť schopný vytvoriť úlohu a následne ju vyriešiť.

ÚLOHY ROZVÍJAJÚCE KOMBINATORICKÉ MYSLENIE

Väčšina kombinatorických úloh prispieva k rozvoju tvorivého myslenia žiakov. Učia matematizovať reálne situácie, vyžadujú tvorivý postup pri riešení a umožňujú rozvíjanie individuálnych schopností žiaka. (Scholtzová, 2004) S každou jednou vyriešenou úlohou žiak preniká hlbšie do kombinatorického myslenia. Úlohy z reálneho života s malým počtom prvkov sú schopní riešiť aj žiaci prvého stupňa základnej školy. Na druhom stupni pribúda množstvo prvkov a aj čisto matematické úlohy, napr. koľko trojuholníkov môžeme vytvoriť z úsečiek s dĺžkou 5cm, 8cm, 3cm, 6cm, 7cm, 2cm.

Najvhodnejšie na rozvíjanie kombinatorického myslenia sú gradované úlohy. Prvá úloha býva z reálneho života s malým počtom prvkov. Zvládne ju väčšina žiakov, aj bez systematickej stratégie. Postupným pridávaním množstva prvkov sú žiaci nútení riešiť úlohy čoraz viac systematicky. Mnohí prídu na určitý postup, ktorý funguje a nasledujúce úlohy už riešia pomocou neho – sú schopní bez zdĺhavého vypisovania zostaviť priamo príklad a úlohu vyriešiť.

ANALÝZA RIEŠENIA ŽIACKYCH PRÁC

<u>Zadanie úlohy 1:</u>

Na oslave sa zúčastnilo 12 osôb. Každý s každým si raz podal ruku. Koľko bolo všetkých podaní?

<u>Analýza riešenia:</u>

Úloha je vhodná na zaradenie pri téme kombinatorika v 7. ročníku, prípadne ako opakovanie pri príprave na Testovanie9 v 9. ročníku. Môže sa použiť pri téme kombinatorika aj v ostatných ročníkoch na druhom stupni základnej školy, keďže sa jedná o úlohu z reálneho života, v 5. a 6. ročníku by bol však vhodnejší menší počet osôb. Úloha má presné, jednoznačné zadanie, existuje však viacero možností riešenia (systematickým vypisovaním, paličkovým systémom, tabuľkou). Keď sa vyberieme ktoroukoľvek cestou, musíme sa vždy dopracovať k rovnakému výsledku.

Bázovou množinou B je 12 ľudí, ktorí si navzájom podávajú ruky. Môžeme si ich predstaviť ako prirodzené čísla od 1 po 12.

$$B = \{1,2,3,4, \dots , 12\}$$

Pracovnou množinou M sú dvojice ľudí, ktorí si navzájom podali ruky. Musíme dať pozor, aby sa nám dvojice neopakovali.

$$M = \{1,2|1,3|1,4| \dots |11, 12|\}$$

Vhodne zvolený organizačný princíp Φ je vypisovaním jednotlivých dvojíc tak, že začneme najprv prvým človekom, ten si podá ruky s ostatnými, pokračujeme druhým človekom, ten si podá ruky so všetkým, okrem prvého,... atď.

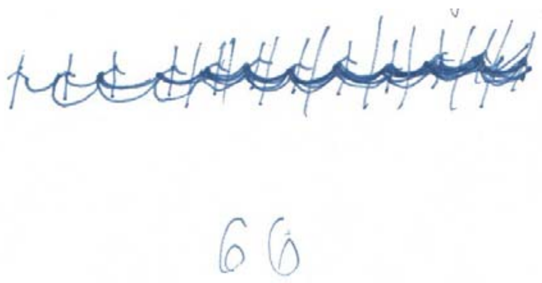
Organizačný princíp Φ   1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 1,10 1,11 1,12

2,3 2,4 2,5 ....

⋮

Analýza riešení žiakov 5. ročníka

Z 13 žiakov sa iba traja dopracovali k správnemu riešeniu. Jeden použil systematické vypisovanie: 1-2, 1-3,1-4, 1-5, ... atď. Môžeme ho zaradiť do úrovne 3 kombinatorického myslenia. Ostatní dvaja riešili pomocou paličkového systému, zistili, že v každom ďalšom riadku je o 1 podanie menej – objavili pri práci určitý postup – úroveň 2 kombinatorického myslenia.

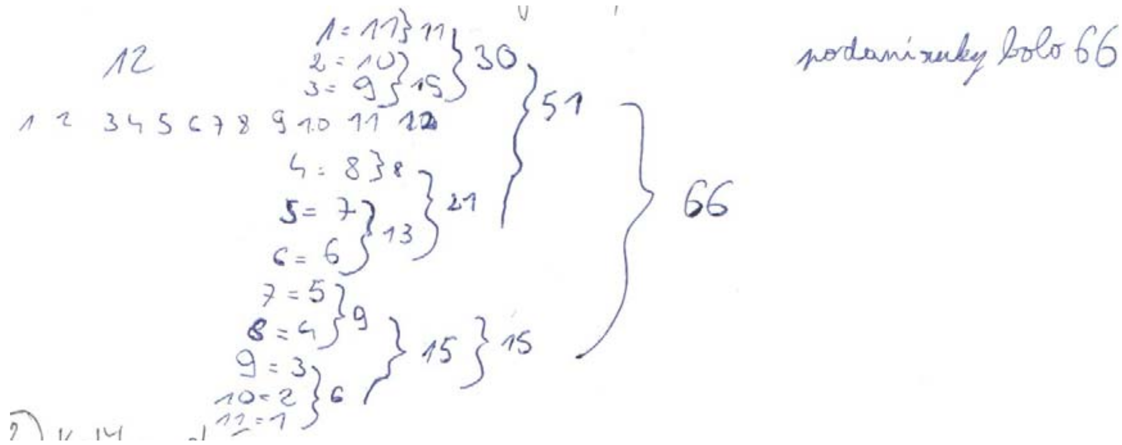


Obrázok 1

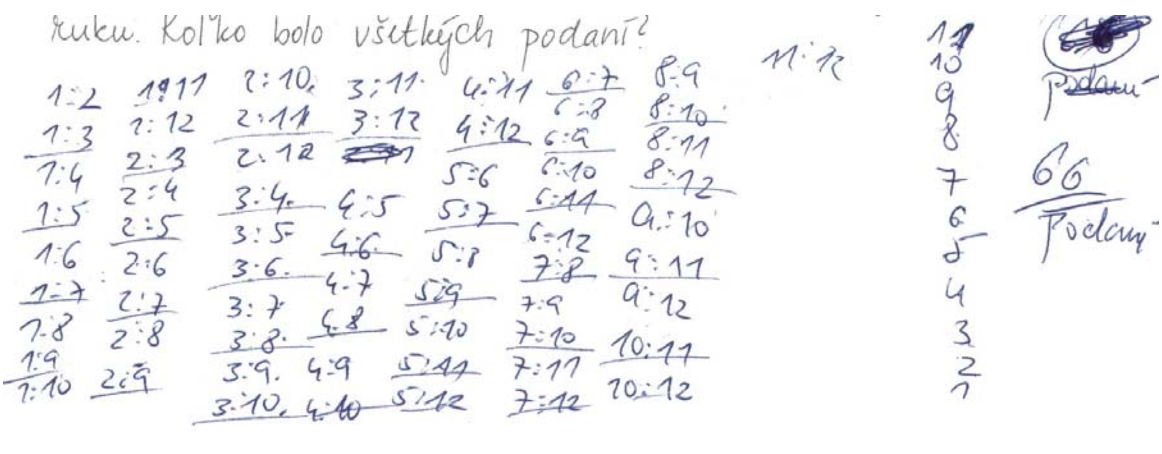
Šesť žiakov sa pokúsilo dopracovať k riešeniu pomocou násobenia: $12 \cdot 12 = 144$ a $12 \cdot 2 = 24$. Môžeme badať určitý náznak logického uvažovania, nie však správneho. Tí žiaci, ktorí vypisovali nesystematicky, sa k správnemu riešeniu nedostali – úroveň 1 kombinatorického myslenia.

Analýza riešení žiakov 7. ročníka

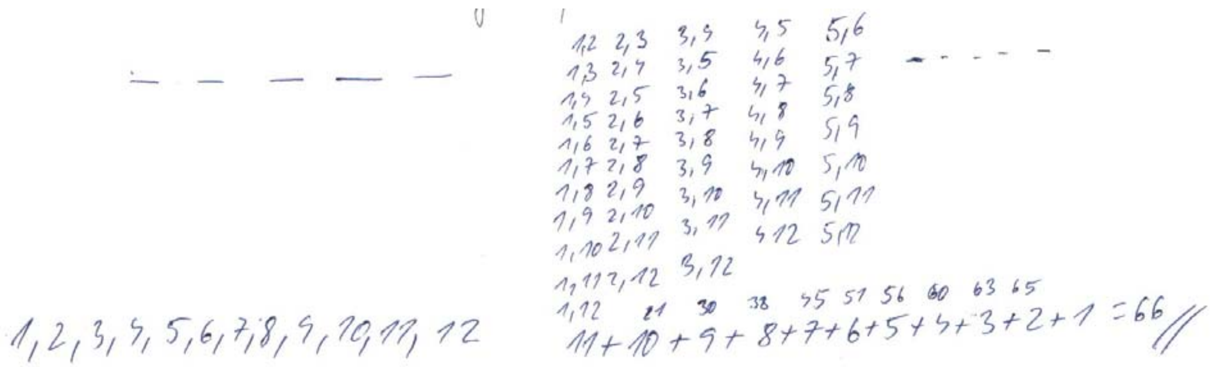
Piati žiaci zo štrnástich vypočítali príklad správne. Jeden použil paličkový systém, dvaja začali systematickým vypisovaním a objavili princíp, že každý ďalší stĺpec, má o jedno podanie menej – úroveň 2 kombinatorického myslenia. Dvaja žiaci si hneď uvedomili, že prvý človek podal ruku jedenástim, druhý už len desiatim, tretí deviatim, ... atď. Zostavili príklad na sčítanie jednotlivých podaní a dostali správny výsledok – úroveň 3 kombinatorického myslenia.



Obrázok 2



Obrázok 3



Obrázok 4

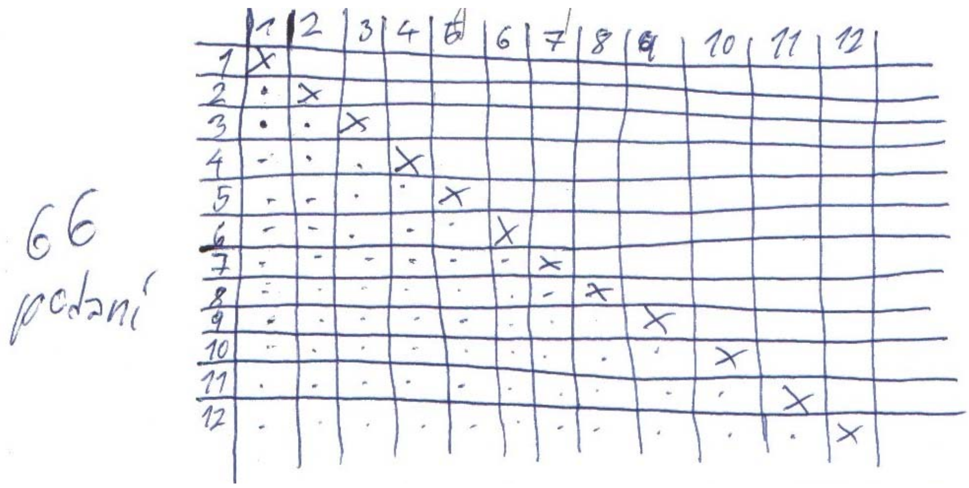
Sedem žiakov sa pustilo do riešenia systémom vyberania z daného množstva prvkov. Uvažovali tak, že ruky si navzájom podávajú dvaja ľudia, čiže máme dve miesta. Na prvé miesto si môžem vybrať kohokoľvek z 12 osôb a na druhé miesto vyberám už iba z 11 osôb. Takto dostali príklad $12 \cdot 11 = 132$. Výsledok stačilo vydeliť dvoma. Neuvedomili si, že ak prvý človek podá ruku druhému, druhý už nemusí podávať ruku prvému, lebo sa jedná o tú istú dvojicu ľudí, nemusia sa dvakrát zdraviť. Chybu si uvedomili, ak sme si namiesto podania rúk kreslili čiary, pretože sme museli prejsť dvakrát po tej istej čiare.

Analýza riešení žiakov 9. ročníka

Zo 14 žiakov jedenásti vyriešili úlohu správne. Niektorí uviedli len správny výsledok bez postupu riešenia, takže nie sme schopní určiť ich úroveň kombinatorického myslenia. Dvaja žiaci postupovali systematickým vypisovaním a piati uviedli hneď príklad:

$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66$$

Mohli by sme ich zaradiť do úrovne 3 kombinatorického myslenia. Jediný žiak zo všetkých troch tried uviedol riešenie pomocou tabuľky, v ktorej si vytvoril jednotlivé dvojice. Spôsob sa ukázal ako veľmi vhodný hlavne z toho hľadiska, že nezabudneme ani na jednu dvojicu, naopak je dosť pracné zistiť počet jednotlivých možností, treba dbať na pozornosť pri sčitovaní – úroveň 2 kombinatorického myslenia.

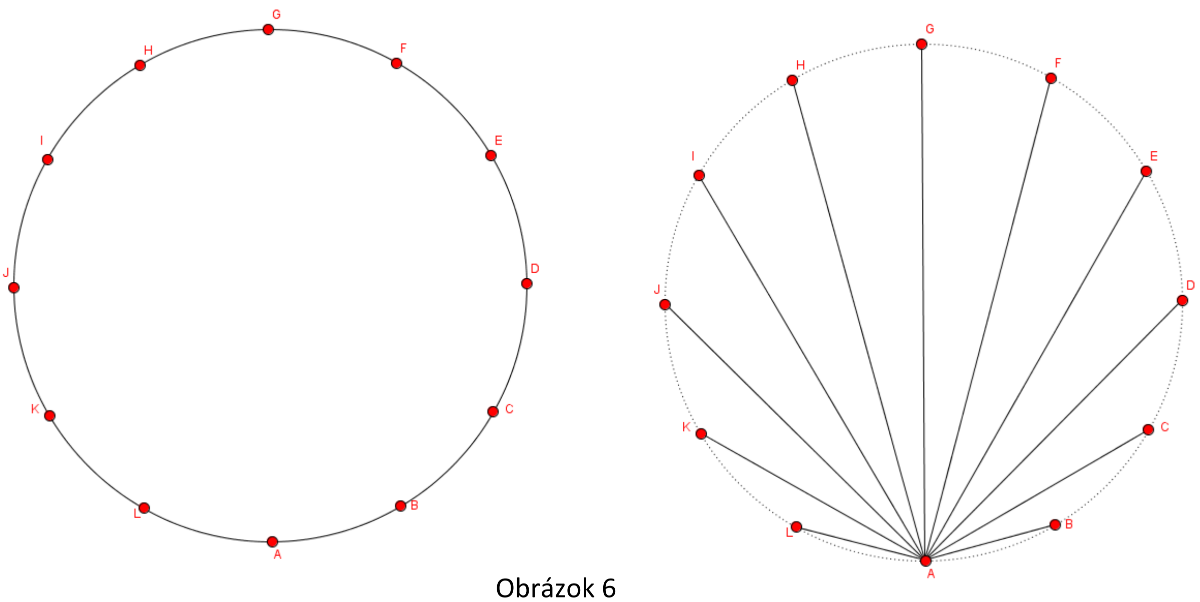


Obrázok 5

Ostatní žiaci, ktorí sa nedopracovali k správnemu výsledku, riešili úlohu pomocou násobenia: $12 \cdot 12 = 144$ a $12 \cdot 11 = 132$.

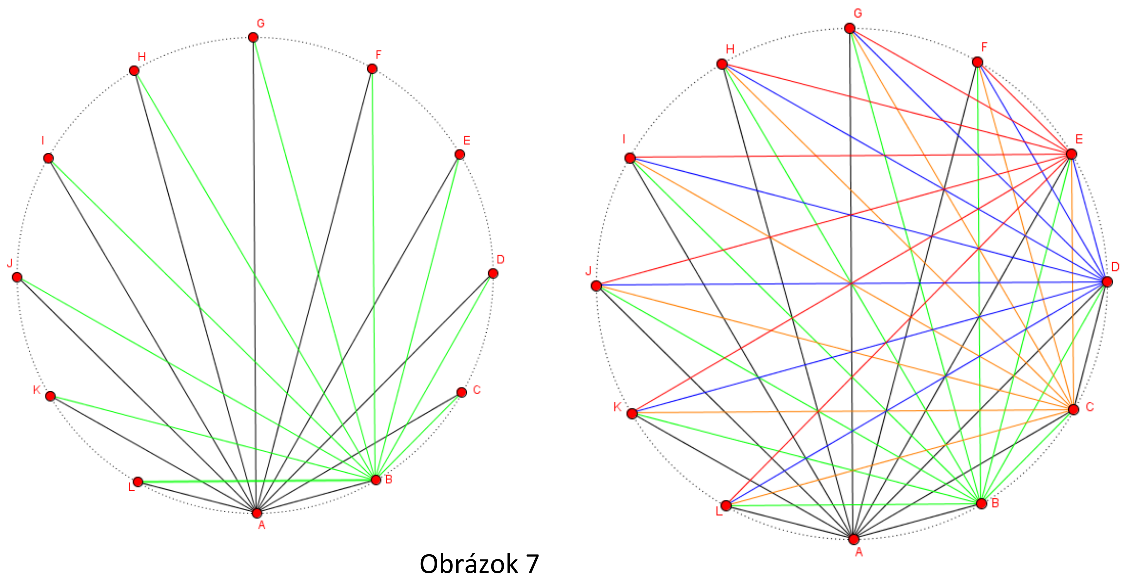
Rozbor úlohy so žiakmi v triede

V každom ročníku sme si daný príklad na nasledujúcej hodine vysvetli pomocou obrázkov vytvorených v GeoGebre. Namiesto ľudí sme používali body a podanie ruky sme nahradili čiarou, ktorá spája dva body. Rozhodli sme sa, že všetci ľudia sa postavia do kruhu (väčšinou ľudia stoja v kruhu, podajú si ruky a rozprávajú sa). Začali sme tak, ako postupovala väčšina žiakov – pospájali sme prvého človeka (bod A) so všetkými, s ktorými si podal ruky (body B až L).



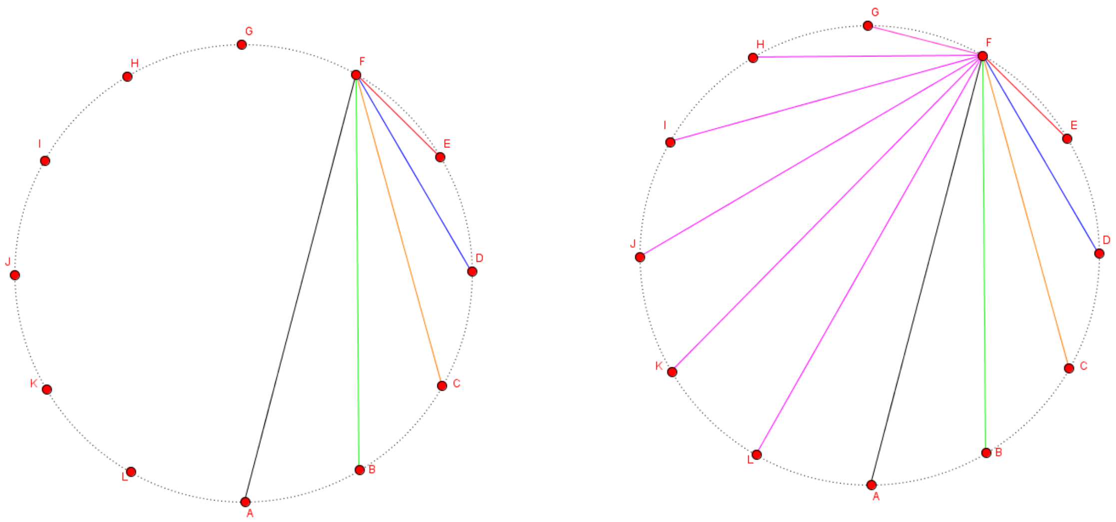
Obrázok 6

Videli sme, že sme vytvorili 11 úsečiek, takže prvý človek si podal ruky s jedenástimi ľuďmi. Prešli sme k druhému človeku (bod B). Jeho podania sme opäť vyznačili úsečkami, ale inej farby. Dostali sme výsledok 10 podaní. Mnohí žiaci, predovšetkým v 5. ročníku, ktorí príklad nevyriešili správne, začali predpokladať, že u ďalších ľudí bude počet podaní rúk klesať vždy o jedno dolu.



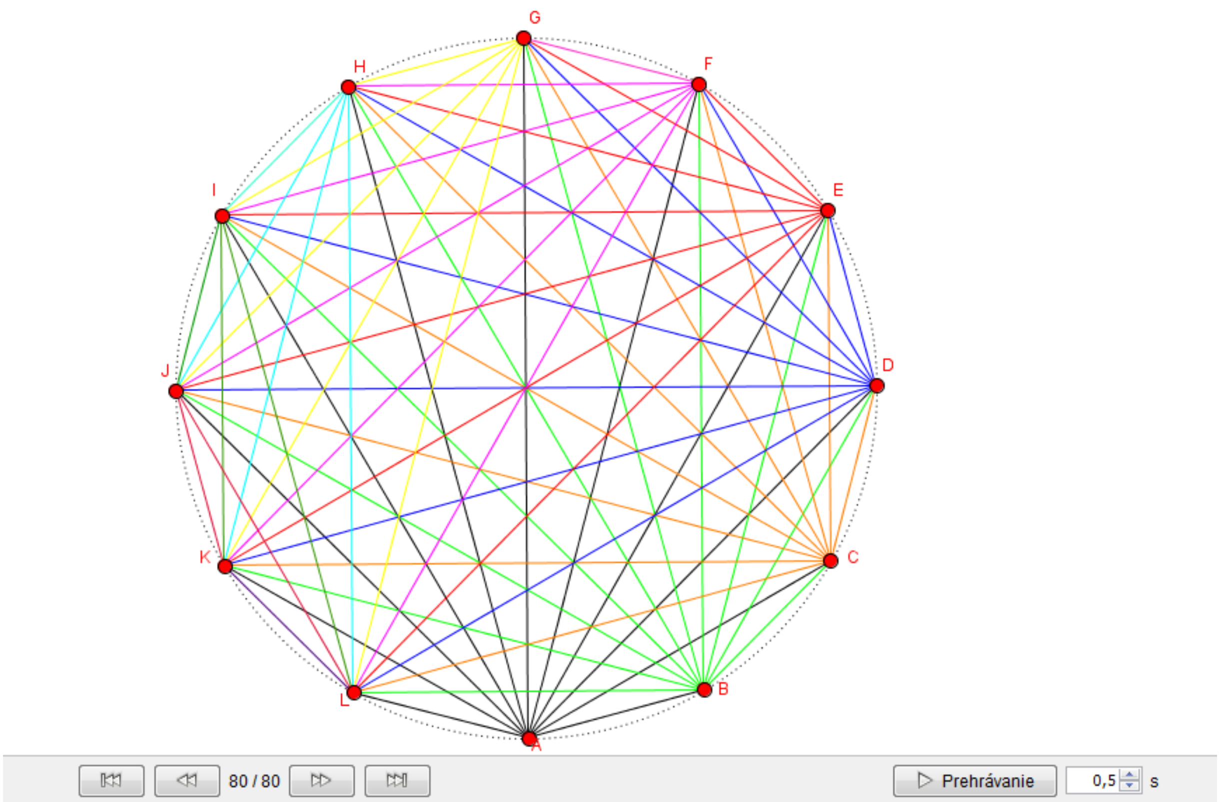
Obrázok 7

Zistili sme, že pri viacerých ľuďoch začína byť obrázok neprehľadný. Preto sme využili tú možnosť, že môžeme niektoré úsečky skryť a neskôr ich, podľa potreby, opäť zobraziť. Ak si zoberieme napríklad počet podaní rúk šiesteho človeka (bod F), vidíme na obrázku, že mu stačí podať si ruky už len so 6 ľuďmi, pretože predchádzajúci piati si s ním už ruku podali.



Obrázok 8

Nástroj prehranie konštrukcie nám umožnil prejsť si celé kreslenie znovu, žiaci mohli sledovať jednotlivé farebné úsečky a zrátať ich počet. Prišli sme k rovnakému záveru ako výpočtom – počet podaní rúk ako aj počet úsečiek na obrázku je 66.



Obrázok 9

Zadanie úlohy 2

Koľko strán a uhlopriečok spolu má pravidelný dvanásťuholník?

Analýza riešenia:

Úloha je vhodná na zaradenie pri téme kombinatorika v 7. ročníku, pri preberaní rovinných útvarov v 8. ročníku, prípadne ako opakovanie pri príprave na Testovanie9 v 9. ročníku. Môže sa použiť aj v 5. a 6. ročníku, vhodnejší by však bol pravidelný n-uholník s menším počtom vrcholov. Žiaci musia ovládať pojem pravidelný n-uholník, strana n-uholníka, uhlopriečka. Úlohu je vhodné počítať po predchádzajúcom príklade s podávaním rúk, žiaci skôr prídu na riešenie systematickým vypisovaním. Úloha má presné, jednoznačné zadanie, opäť však existuje viacero možností riešenia (graficky, systematickým vypisovaním dvojíc vrcholov).

Bázovou množinou B je 12 vrcholov, ktoré musíme navzájom pospájať tak, aby vznikli strany dvanásťuholníka a všetky jeho uhlopriečky.

$$B = \{A, B, C, D, \dots, L\}$$

Pracovnou množinou M sú dvojice vrcholov, ktoré spolu spájame úsečkami. Musíme dať pozor, aby sa nám neopakovali.

$$M = \{A, B|A, C|A, D|\dots|K, L|\}$$

Vhodne zvolený organizačný princíp Φ je vypisovaním jednotlivých dvojíc tak, že začneme najprv prvým vrcholom, ten spojíme s ostatnými, pokračujeme druhým vrcholom, ten spojíme so všetkými, okrem prvého,... atď.

Organizačný princíp Φ A,B A,C A,D A,E A,F A,G A,H A,I A,J A,K A,L

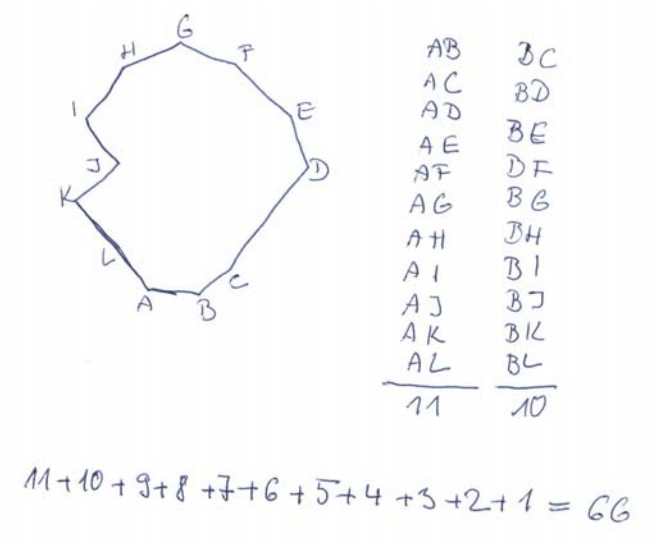
B,C B,D B,E ....

⋮

Alebo môžeme postupovať graficky, načrtnutím dvanásťuholníka a kreslením jednotlivých úsečiek spájajúcich jeho vrcholy.

Analýza riešení žiakov 7. ročníka

Úlohu správne vyriešili len tí žiaci, ktorí mali dobre vypočítaný aj predchádzajúci príklad. Podarilo sa to však iba dvom. Vychádzali z rovnakého princípu ako v 1. úlohe – vytvárali dvojice z jednotlivých bodov. Môžeme ich zaradiť do úrovne 3 kombinatorického myslenia. Ostatní žiaci sa buď do riešenia ani len nepustili alebo sa pokúšali riešiť úlohu graficky. Tu väčšinou stroskotali už pri náčrte dvanásťuholníka.



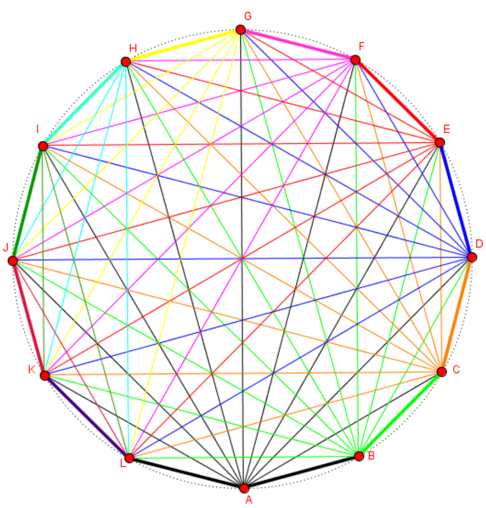
Obrázok 10

Analýza riešení žiakov 9. ročníka

Úlohu správne vyriešili len dvaja žiaci z tých, ktorí mali dobre vypočítaný aj predchádzajúci príklad. Rovnako ako siedmaci, aj oni postupovali systematickým vypisovaním jednotlivých dvojíc, nedopísali však do konca, objavili princíp – úroveň 3 kombinatorického myslenia. Nikomu, kto sa pokúšal riešiť príklad graficky, sa nepodarilo prísť k správnemu riešeniu. Väčšina náčrtov bola príliš malá, už pri malom počte čiar sa strácala prehľadnosť a chuť postupovať ďalej. Niektorí žiaci vyrátali počet uhlopriečok pomocou príkladu $12 \cdot 2 = 24$ alebo $12 : 2 = 6$ a spočítali s počtom strán dvanásťuholníka. Jeden žiak predpokladal, že z každého vrcholu vychádza 12 úsečiek, tak dostal výsledok 144.

Rozbor úlohy so žiakmi v triede

Na základe rozboru predchádzajúceho príkladu, už väčšina žiakov prišla na správnu odpoveď. Grafické znázornenie podania rúk je vlastne riešením našej úlohy 2. Bolo potrebné už len hrubo zvýrazniť vzniknutý dvanásťuholník.



Obrázok 11

Zadanie úlohy 3

Koľko uhlopriečok má pravidelný dvadsaťuholník?

Analýza riešenia:

Úloha je vhodná na zaradenie po predchádzajúcich dvoch príkladoch. Žiaci skôr prídu na riešenie, poznajú princíp z predchádzajúcich príkladov, ľahko určia počet strán a uhlopriečok spolu. Úloha má presné, jednoznačné zadanie, môžeme postupovať viacerými spôsobmi – najvhodnejšie sa osvedčilo systematické vypisovanie dvojíc vrcholov. Buď zistíme počet všetkých dvojíc vrcholov bez opakovania (súčet strán a uhlopriečok spolu) a odpočítame počet strán, alebo vypíšeme iba tie dvojice vrcholov, ktoré netvoria strany dvadsaťuholníka.

Bázovou množinou B je 20 vrcholov, ktoré musíme navzájom pospájať tak, aby vznikli všetky uhlopriečky dvadsaťuholníka.

$$B = \{A, B, C, D, \dots, T\}$$

Pracovnou množinou M sú dvojice vrcholov, ktoré spolu spájame úsečkami. Musíme dať pozor, aby sa nám neopakovali a netvorili strany dvadsaťuholníka.

$$M = \{A, C|A, D|A, E|\dots|R, T|\}$$

Vhodne zvolený organizačný princíp Φ je vypisovaním jednotlivých dvojíc tak, že začneme najprv prvým vrcholom, ten spojíme s ostatnými – musím však vylúčiť vrchol, s ktorým tvorí stranu dvadsaťuholníka (druhý vrchol – bod B), pokračujeme druhým vrcholom, ten spojíme so všetkými, okrem prvého a tretieho,... atď.

Organizačný princíp Φ A,C A,D A,E A,F A,G A,H A,I A,J A,K A,L ...

B,D B,E ....

⋮

Analýza riešení žiakov 9. ročníka

Iba jednému žiakovi sa podarilo správne určiť počet uhlopriečok, mal zároveň dobre vypočítané aj predchádzajúce dva príklady. Určil najprv súčet strán a uhlopriečok spolu (vypočítal príklad $19 + 18 + \dots + 2 + 1 = 190$) a potom odpočítal počet strán – úroveň 3 kombinatorického myslenia. Ostatní žiaci sa do riešenia ani nepustili.

Rozbor úlohy so žiakmi v triede

Vzhľadom na veľký počet úsečiek sa úlohu neoplatí riešiť graficky. Na príkladoch s menším počtom vrcholov sme prišli na spôsob riešenia úloh daného typu, teraz už len využijeme tento princíp. Musíme si uvedomiť, že pomocou princípu z predchádzajúcich príkladov vypočítame súčet strán a uhlopriečok spolu, čiže pri riešení našej úlohy, musíme od výsledku odčítať počet strán – čo je pri dvadsaťuholníku číslo 20.

ZÁVER

Analýza žiackych riešení nám pomáha lepšie pochopiť myšlienkový proces žiaka, jednotlivé kroky jeho riešenia, vidíme, čo zvláda bez problémov a naopak, odhalíme miesta, kde sa necíti isto alebo problematike vôbec nerozumie.

Ukázali sme, že prvú úlohu z reálneho života vyriešili aj niektorí žiaci 5. ročníka, hoci na druhom stupni základnej školy ešte tému kombinatorika nepreberali. U siedmakov sme očakávali väčšiu úspešnosť pri riešení 1. úlohy, napriek tomu sa niektorým podarilo vyriešiť aj 2. úlohu, aj keď mnohouholníky ešte nepreberali. Deviataci zvládli 1. úlohu bez väčších problémov, pri riešení 2. a 3. úlohy boli už menej úspešní. Zadanie matematickej úlohy, ktorá sa rieši pomocou princípov kombinatoriky, bolo pre nich náročné. Keď sme matematickú úlohu previedli na úlohu z reálneho života, viacerí vedeli, ako treba pri riešení postupovať.

V úlohách sme ukázali použitie matematického aparátu na demonštráciu reálnej situácie, znázornenie medziľudských vzťahov, prepojili sme kombinatoriku s geometriou. Následne v analýze žiackych riešení sme prišli k záveru, že najviac správnych riešení bolo vtedy, ak sa žiak pustil do riešenia systematicky alebo použil priamo výpočet na základe skúseností z predchádzajúceho príkladu. Môžeme teda skonštatovať, že väčšina žiakov, ktorí správne vyriešili úlohy dosiahla úroveň 3 kombinatorického myslenia.

V procese vzdelávania je dôležité, aby žiak rozumel svojmu učiteľovi. Aj učiteľ by mal rozumieť matematickému mysleniu svojho žiaka, teda aj jeho kombinatorickému mysleniu. Analýza žiackych prác a následne hodnotenie úrovne kombinatorického myslenia žiakov nám umožňuje lepšie pochopiť problémy, ktoré žiak pri riešení má, pomôcť mu ich odstrániť, dať mu šancu byť múdrejším človekom a to nám dáva možnosť byť lepším učiteľom.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

Bálint, Ľ., Balúchová, A., Černek, P. a kol. 2010. Štátny vzdelávací program: Matematika. Bratislava : Štátny pedagogický ústav. 2010, 45 strán, dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf ,citované dňa 25. 6. 2013

Fischbein, E., & Grossman, A. 1997. Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. In Educational Studies in Mathematics, 34(1), 27-47

Scholtzová, I. 2004. *Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole.* Prešov: Metodicko-pedagogické centrum. 2004, 38 strán, ISBN 80-8045

Žabka, J. Černek, P.2011. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2.ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť*. Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, s.r.o., 2011, ISBN 978-80-8120-050-2

ADRESA AUTORA

Mgr. Katarína Halajová
ZŠ s MŠ sv. Gorazda
Dlhá 78
949 01 Nitra
katka.halajova@gmail.com