RIEŠENIE ÚLOH INOVATÍVNYMI METÓDAMI AKO PROSTRIEDOK VYUČOVANIA MATEMATIKY A FORMOVANIA POZNATKU

ANDREA KOTRUSZOVÁ

ABSTRAKT

Príspevok sa zamýšľa nad možnosťami využitia inovatívnych metód a foriem vyučovania matematiky v dvoch tematických okruhoch: 1. Geometria a meranie 2. Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika. Cieľom bolo načrtnúť a analyzovať konkrétne didaktické situácie na matematike v 8. ročníku ZŠ a tercii osemročného gymnázia. Prvá kapitola je zameraná na planimetriu v spomínanom ročníku, konkrétne tematický celok Kružnica a kruh. Na základe vybraných úloh interpretuje možnosti riešenia, ktoré vedú ku konštrukcii poznatku. Zároveň predstavuje tvorbu názorných pomôcok využitím didaktického softvéru GeoGebra. Druhá časť sa zaoberá úlohami, ktoré venujú pozornosť kombinatorickému mysleniu žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania cez jednotlivé úrovne tohto myslenia. Príspevok chce zároveň poukázať na ďalšie možnosti využitia geometrického softvéru GeoGebra úlohami pre žiakov s vyššími poznávacími záujmami.

ÚVOD

Z hľadiska vyučovania matematiky je ideálne pri získavaní určitého poznatku zadať žiakovi problém, ktorého riešenie vedie ku konštrukcii daného poznatku. Didaktické situácie, ktoré vytvárame v 8. ročníku ZŠ a tercii osemročného gymnázia (OG) využitím vybraných úloh z tematického celku: Kružnica a kruh so zameraním na polohové vlastnosti a z tematického celku: Kombinatorika, podnecujú objavný prístup žiaka. Poznatok predkladajú ako výsledok riešenia špeciálnej úlohy (repersonalizácia).

V systéme úloh v prvej časti sa snažíme poukázať na poznatky a schopnosti, ktoré by žiak mal mať, aby ich mohol úspešne riešiť, buď konštruovaním rysovacími pomôckami, alebo využitím vhodne zvoleného didaktického softvéru, prípadne pomocou animácie v danom softvéri (dynamické konštrukcie). Sledujeme metódy a postupy riešenia problému, ktoré vedú k tvorbe poznatkov i k rozvíjaniu kľúčových kompetencií žiakov.

Praktickým námetom je i možnosť tvorby dynamických konštrukcií učiteľom s využitím didaktického softvéru GeoGebra . Žiakom, ktorých zaujala téma kružnica a chcú hľadať ďalšie možnosti jej uplatnenia, ponúka učebnica (Žabka, Černek,2. časť, 2012, str. 43) úlohy: Gotické oblúky . Riešením úloh v GeoGebre sa vytvárajú rôzne kompetencie a uplatňuje sa umelecko-bádateľský prístup.

Druhá časť predkladá systém úloh prostredníctvom ktorých možno formovať i vyššie úrovne kombinatorického myslenia, aj keď u žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania sa zvyknú uplatňovať iba prvé dve úrovne. V kombinatorike majú šancu vyniknúť všetci žiaci bez ohľadu na schopnosti. Téma vytvára možnosti uplatňovať napríklad formatívne hodnotenie žiakov (spôsob, alternatívne riešenia, originálnosť, schopnosť zdôvodnenia).

DIDAKTICKÉ SITUÁCIE A VYUŽITIE DYNAMICKÝCH KONŠTRUKCIÍ V PLANIMETRII

Tematický okruh Geometria a merania v ŠVP obsahuje tematický celok Kružnica a kruh, ktorý je v učebnici matematika pre 8. ročník ZŠ a terciu OG sprístupnený motivačnými úlohami v ktorých sa využívajú poznatky z predchádzajúcich tém súvisiacich s trojuholníkom.
Vybrali sme úlohy podnecujúce objavný prístup žiaka a vytvorili pracovný list pre dané didaktické situácie. Pozornosť venujeme najmä polohovým vlastnostiam. Snažíme sa poukázať na potrebné poznatky a schopnosti, ktoré by žiak mal mať, aby mohol úlohy úspešne riešiť konštruovaním rysovacími pomôckami, využitím vhodne zvoleného didaktického softvéru, prípadne s pomocou animácie v danom softvéri. Sledujeme metódy a postupy riešenia problému, ktoré vedú ku konštrukcii poznatkov i k rozvíjaniu kľúčových kompetencií.
Dôležitou súčasťou sú i dynamické konštrukcie s využitím didaktického softvéru GeoGebra .

“ Aktivita žiaka pri vyučovaní matematiky nemá byť orientovaná len na úsilie zapamätať si, ale má byť spojená s hľadaním podstaty problému, so samostatným myslením. Vyučovanie má do istej miery kopírovať objaviteľský postup. To si vyžaduje, aby sa učivo, pokiaľ je to možné, predkladalo vo forme problémov a otázok, ktoré majú žiaci riešiť“ (Bálint 2010, www.statpedu.sk)

Z hľadiska vyučovania matematiky je ideálne pri získavaní určitého poznatku zadať žiakovi problém, ktorého riešenie vedie ku konštrukcii daného poznatku. Žiak pracuje v modelových, pripravených situáciách pomocou vhodných pomôcok prípadne didaktickej techniky. IKT prinášajú rôzne softvéry ktoré sa dajú uplatniť. Vedecký poznatok určený na vyučovanie stanovia príslušné inštitúcie a vyučovaný poznatok interpretuje učiteľ (didaktická transpozícia)s jasnou koncepciou. A práve týmto smerom sme zamerali našu pozornosť v snahe o modernizáciu vyučovacieho procesu.

Podstatou predkladanej skupiny úloh je riešenie problému, ktoré vyžaduje od žiaka vlastnú aktivitu. S využitím vybraných úloh z tematického celku: Kružnica, konštruujeme didaktickú situáciu v 8. roč. ZŠ (tercii gymnázia). Zameriavame sa na analýzu apriori sledovaním použitia metódy objavovania (argumentácie) – implicitne. Analyzujeme možné prístupy a stratégie žiaka riešením danej problémovej úlohy. Predpoklad je , že žiak s dostatočne osvojenými základnými poznatkami o vlastnostiach kružnice má predpoklad na to, aby úlohy úspešne vyriešil a odpovedal na problémové otázky. Očakávame, že zvládnutie úlohy pomocou didaktického softvéru si vyžaduje minimálne základnú schopnosť práce s PC a daným softvérom (GEOGEBRA príp. CABRI GEOMETRIA II). Väčšina žiakov využije grafickú metódu pomocou rysovacích pomôcok. Ak učiteľ zadá úlohu bezprostredne po inštruktáži k danému softvéru (ak je voľne prístupný – môže si prácu precvičiť i v domácom prostredí), žiak bude voliť túto formu riešenia.

ORGANIZÁCIA MODELOVEJ SITUÁCIE

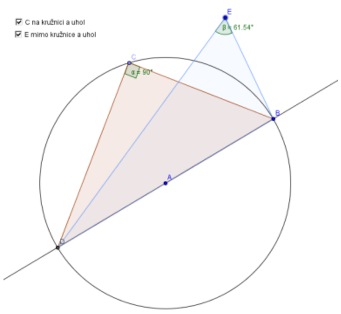
Škola: Piaristické gymnázium sv. Jozefa Kalazanského v Nitre

Trieda: tercia A, osemročné štúdium

Predmet: matematika, (po prebratí tem. celku: Kružnica, Tálesova kružnica, Vzájomná poloha priamky a kružnice)

Priebeh: čas 40 min

Spôsob zadávania: na začiatok aktivity učiteľ použije motivačný aplet Tálesova kružnica



Obrázok 1 Tálesova kružnica, dynamický obrázok vytvorený v GeoGebre

Učiteľ rozdá zadania úloh s obrázkami a upozorní žiakov, že očakáva i viac možností riešenia úlohy rôznymi metódami, zdôvodnenia žiak vpisuje do pracovného listu. Grafické riešenia realizuje priamo alebo na PC.

Didaktická technika a pomôcky: osobný počítač (*využíva žiak)*, dataprojektor (*možnosť ilustrovať riešenie učiteľom),* softvér: GeoGebra 4.2, Cabri Geometria II., rysovacie pomôcky.

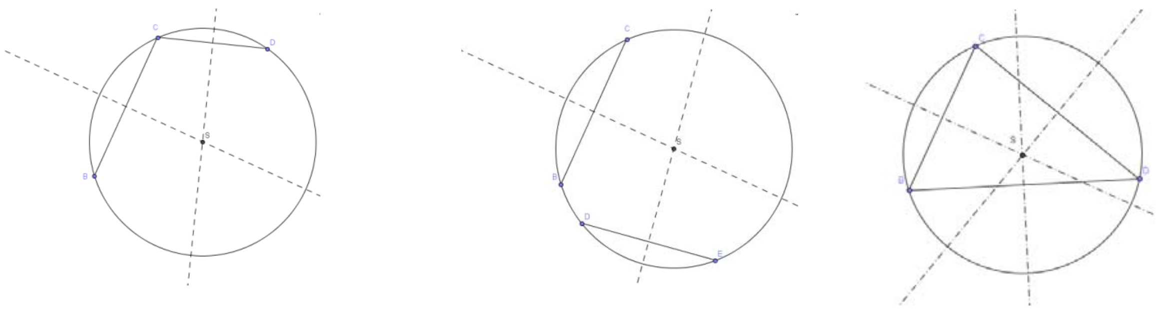
Vedomosti, ktoré musí žiak mať, aby mohol dané úlohy riešiť: Danú metódu je schopný využiť žiak po prebratí učiva: Kružnica. Obsah daného tem. celku zahŕňa: Definícia kružnice, pojmy: stred, polomer, priemer, tetiva, vnútorná oblasť kružnice, vonkajšia oblasť kružnice, vpísaná, opísaná kružnica trojuholníku, Tálesova kružnica, kolmosť, vzájomná poloha priamky a kružnice, množiny bodov danej vlastnosti.

ZADANIA PROBLÉMOVÝCH ÚLOH

Úloha 1

Je daná kružnica, ktorá nemá vyznačený svoj stred. Graficky nájdite daný stred. (Úloha z pracovného zošita[4])

Kontextová varianta: Na pozemku kruhového tvaru je potrebné presne v strede umiestniť zavlažovač. Graficky nájdite stred.



Obrázok 2 Riešenie úlohy 1 - tri alternatívy

Analýza

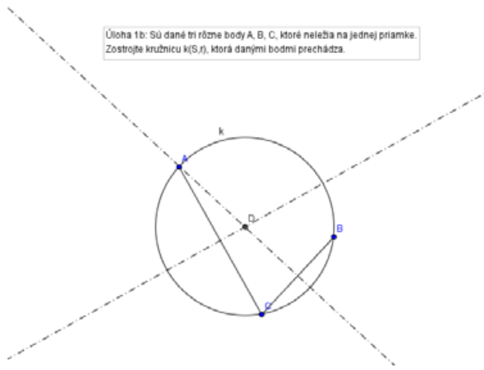
Žiak obyčajne využíva poznatok o opísanej kružnici trojuholníku, v kružnici si predstaví trojuholník a realizuje všetky osi. Klasická metóda komplikuje prácu žiakom menej zručným, prípadne zrakovo postihnutým. Nepresnosť pri hľadaní stredu úsečky, prípadne realizácii kolmice spôsobujú výrazné nepresnosti. Klasické konštruovanie je i časovo náročné.

Úloha 1B

Sú dané tri rôzne body A, B, C, ktoré neležia na jednej priamke. Zostrojte kružnicu k(S,r), ktorá danými bodmi prechádza.

Kontextová varianta: Tri už existujúce stĺpy majú na obvode podopierať kruhovú strechu. Graficky ju určte a vyznačte jej polomer.

Odpovedzte na doplňujúce otázky: a) Koľko takých kružníc existuje? b)Koľko rôznych kružníc prechádza: -dvoma rôznymi bodmi… -troma rôznymi, ležiacimi na jednej priamke:… -štyrmi bodmi tvoriacimi obdĺžnik. *Úlohe predchádzalo objavovanie*, (Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012, učebnica str.14/úlohy 15,16,17 [1])



Obrázok 3 Riešenie úlohy 1b

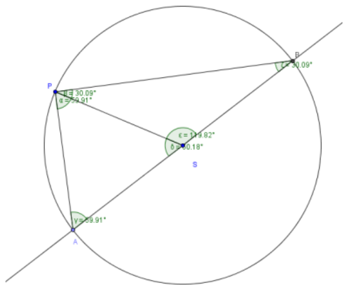
Analýza

Úloha priamo nadväzuje na úlohu 1.

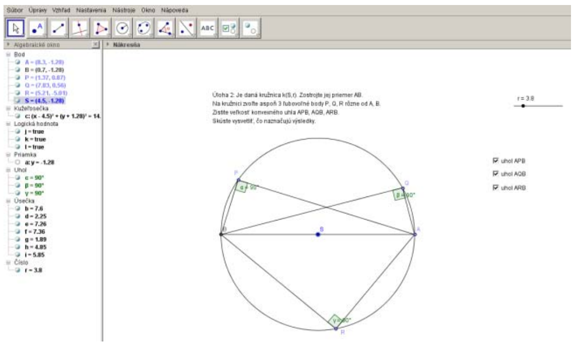
Úloha 2

Je daná kružnica k(S,r). Zostrojte jej priemer AB. Na kružnici zvoľte aspoň 3 body P, Q, R rôzne od A, B. Meraním zistite veľkosť konvexného uhla APB, AQB, ARB. Skúste vysvetliť, čo naznačujú výsledky. Zdôvodnite vyslovené tvrdenie pre každý bod kružnice rôzny od A,B. *Úlohe predchádzalo objavovanie* (Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012,učebnica str.19/2,3,str.20/úlohy 4,5,6 [1])

Kontextová: Zistite pod akým uhlom je vidieť priečelie domu AB s ľubovoľného miesta na hranici polkruhového pozemku s priemerom AB .



Obrázok 4 Riešenie úlohy 2



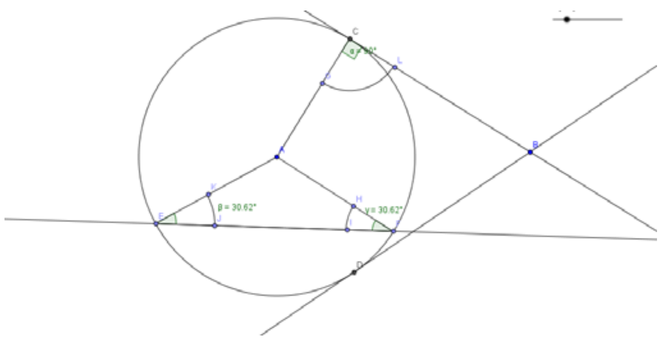
Obrázok 5 Ukážka dynamického obrázka k úlohe 2 v GeoGebre

Analýza

Klasická metóda neumožňuje žiakom merať s ľubovoľnou presnosťou. V geogebre vidno aj zhodnosť uhlov aj súčet uhlov pri vrchole P a tým naznačí spôsob klasického dôkazu Tálesovej vety.

Úloha 3

Je daná kružnica k(S,r), jej ľubovoľná sečnica ***p*** a dotyčnica ***t***. Porovnajte veľkosť uhla α (uhla sečnice ***p*** danej kružnice a polomeru v daných bodoch) a uhla β (dotyčnice ***t*** a polomeru v bode dotyku). Odpovedzte na doplňujúce otázky: Aké sú veľkosti uhlov? α=$|\angle FEA| = |\angle EFA|$ .... β=..........Zostrojte sečnicu tak, že jej tetiva EF je menšia ako daná , ako to ovplyvní uhol α ? Sledujte postupnosť veľkostí uhlov so zmenšujúcou sa tetivou. K čomu sa blíži veľkosť uhla α ? *Úlohe predchádzalo zdôvodnenie.* (Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012 uč. Str.16/4 [1])



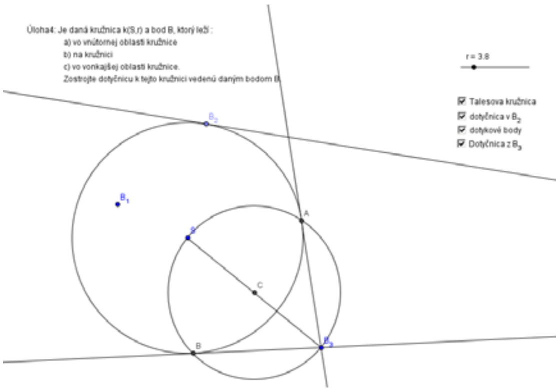
Obrázok 6 Riešenie úlohy 3

Analýza

Porovnanie uhlov môže prebehnúť graficky, no žiaci uprednostňujú meranie uhlomerom. Nepresnosti v tejto úlohe nespôsobujú výrazné chyby v úvahe. Žiak si uvedomí, že uhol pri sečnici je menší. Dôležitejší je ale poznatok získaný až pri dynamickom obrázku. Nevýhoda klasickej metódy je opäť neefektívnosť. Až pri skonštruovaní viacerých sečníc vidí, ako sa uhol blíži k pravému (čo možno v geogebre vidieť pri jemnom posune bodu po kružnici, program uhol automaticky meria).

Úloha 4

Je daná kružnica k(S,r) a bod B, ktorý leží : a) vo vnútornej oblasti kružnic b) na kružnici c) vo vonkajšej oblasti kružnice. Zostrojte dotyčnicu k tejto kružnici vedenú daným bodom B. Odpovedzte na doplňujúce otázky: Koľko dotyčníc existuje: Z bodu B1 , z bodu B2, z bodu B3 ? *Úlohe predchádzalo vysvetlenie* (Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012. uč. Str.22 [1])



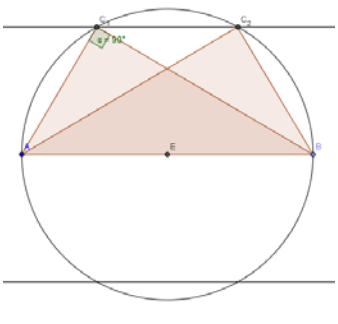
Obrázok 7 Riešenie úlohy 4

Analýza

Iba malá časť žiakov zrealizuje dotyčnice z B3 bez použitia Tálesovej kružnice. Na jednoduché otázky vedia odpovedať. V GeoGebre program dotyčnice konštruuje automaticky.

Úloha 5

Zostrojte trojuholník ABC, kde |AB| =8, v_c =3,5, $|\angle ACB| = 90^\circ$. Odpovedzte na doplňujúce otázky: Pre aký vzťah veľkostí |AB| , v_c , trojuholníka má úloha: a) dve riešenia, b) jedno riešenie, c) žiadne riešenie v jednej polrovine?



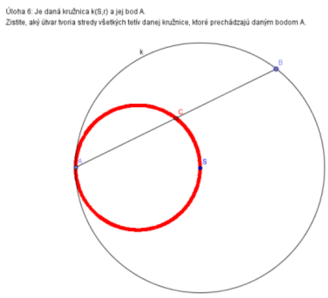
Obrázok 8 Riešenie úlohy 5

Analýza

Aby žiak mohol danú úlohu riešiť musí si vopred urobiť rozbor a premyslieť postup konštrukcie pomocou množín bodov danej vlastnosti. Odpovede na doplňujúce otázky vytvárajú diskusiu konštrukčnej úlohy a privádzajú žiakov k postupnému riešeniu parametrických úloh(bez konkrétnych dĺžok).

Úloha 6

Je daná kružnica k(S,r) a jej bod A. Zistite, aký útvar tvoria stredy všetkých tetív danej kružnice, ktoré prechádzajú daným bodom A.



Obrázok 9 Riešenie úlohy 6

Analýza

Aby žiak mohol danú úlohu riešiť musí poznať metódu množín bodov danej vlastnosti. Privádza žiakov k postupnej tvorbe tetív a metóde pokus-omyl. Vytvára metakognitívnu úroveň v procese myslenia. Tvorí prechodový článok k téme vzájomná poloha dvoch kružníc. Konštrukcia v GeoGebre použitím zapnutej stopy bodu C pri pohybe bodom B po kružnici je veľmi názorná.

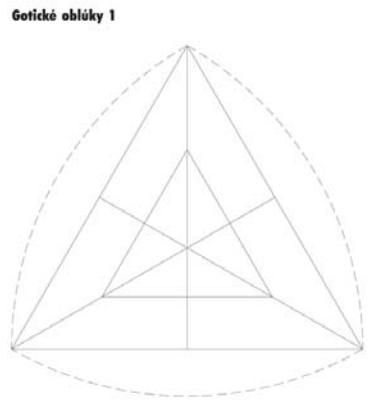
OBRÁZKY TVORENÉ KRUŽNICOVÝMI OBLÚKMI

Žiakom, ktorých téma Kružnica zaujala a chcú hľadať ďalšie možnosti jej uplatnenia, ponúka učebnica (Žabka, Černek: Matematika pre 8. ročník ZŠ a terciu OG 2. časť, 2012, str. 43) úlohy: Gotické oblúky . Riešením úloh sa vytvárajú rôzne kompetencie a uplatňuje sa umelecko-bádateľský prístup. Pracovný list ku konštrukcii trojlístka je možné nájsť na stránke www.orbispictus.sk v sekcii pre učiteľa. Žiak má možnosť priamo rysovať časti kružníc alebo pomocou sietí pomocných čiar hľadať vhodne zvolený pomocný trojuholník v úlohe: Gotické oblúky 2 (Žabka, Černek: Matematika pre 8. ročník ZŠ a terciu OG 2. časť,2012, str. 94). Geometrický softvér GeoGebra vytvára možnosti pre efektívnejšie zvládnutie hľadania pomocného trojuholníka vytvorením si posuvníka pre veľkosť jeho strany a následným animovaním danej situácie. Podľa nás však nie je vhodné zaradiť animáciu pred vlastné objaviteľské úsilie žiakov.

Nasledujúce obrázky sú tvorené softvérom GeoGebra. Sú v nich použité prevažne kružnicové oblúky ale v ornamentoch sa využívajú i zhodné a podobné zobrazenia.

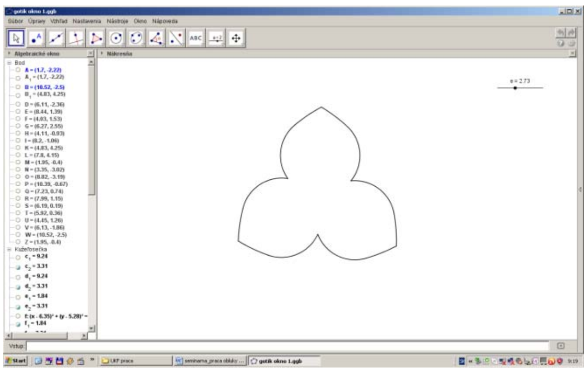
Úloha 1

Na gotických oknách možno často vidieť ornament trojlístka. Aby sme ho mohli narysovať, potrebujeme zostrojiť sieť pomocných čiar. Základom sú dva vhodne zvolené rovnostranné trojuholníky. ... Podľa predchádzajúceho opisu narysujte do vytlačeného obrázka s predkreslenými čiarami gotický trojlístok. “ *(Žabka, Černek, 2012, str. 43)*



Obrázok 10 Pracovný list pre žiaka.
(www.orbispictus.sk/userfile/file/cms/m8/-2-internet.pdf)

Riešenie využitím softvéru GeoGebra využíva kružnicové oblúky. Pri zobrazení objektov vidno základné trojuholníky. Posuvník umožňuje formovanie trojlístka.

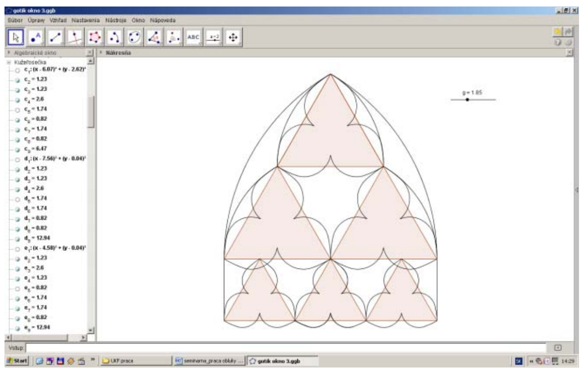


Obrázok 11 Gotický trojlístok.

Úloha 2

Vytvorte gotické okno.

Riešenie využíva kružnicové oblúky ,rotáciu, posunutie a rovnoľahlosť.



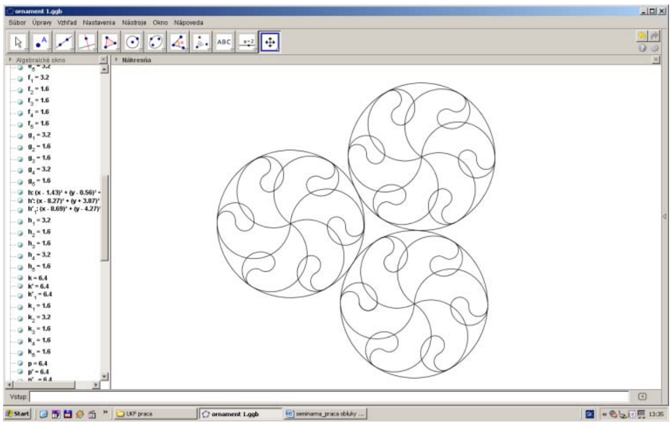
Obrázok 12: Gotické okno.

Úloha 3

Vytvorte ornament tvorený kružnicovými oblúkmi.

Riešenie

Riešenie využíva kružnicové oblúky ,rotáciu.



Obrázok 13: Ornament.

ZAVEDENIE PERMUTÁCIE S OPAKOVANÍM PROSTREDNÍCTVOM RIEŠENIA ÚLOH V KOMBINATORIKE

V kombinatorike majú šancu uplatniť sa všetci bez ohľadu na schopnosti. Mechanicky mysliaci žiaci uprednostňujú prácne ale univerzálne aplikovateľné vypisovanie možností (primeraný počet možností, na ZŠ časovo zvládnuteľné). Logicky mysliaci, začínajú zovšeobecňovať snažia sa nájsť spôsob (metódu, mechanizmus, vzorec) a takéto riešenie nie je zdĺhavé. V 7. ročníku ZŠ a sekunde OG žiaci pracujú s permutáciami na elementárnej úrovni kombinatorického myslenia. S usporiadaním množiny sa stretávajú už skôr, no základom je schopnosť vypisovať možnosti rôznymi spôsobmi. Majú snahu systematizovať (bez systému → tabuľkou → stromovou metódou...)

Tabuľka 1 Úrovne kombinatorického myslenia (Fischbein & Grossman, 1997)

úroveň	Kombinatorické myslenie
1	- zisťovanie počtu prvkov vypísaním možností
2	- metóda pokus - omyl
3	- systematické vypisovanie , využitie vzorca
4	- definovanie permutácie ako bijektívneho zobrazenia na n-prvkovej množine a ďalšie kombinatorické princípy.

Naším cieľom je pomocou vybraných úloh z tematického celku: Kombinatorika, vytvoriť u žiakov predstavu o permutáciách s opakovaním s využitím metódy „ Stars and Bars “ v 8. roč. ZŠ (tercii OG). Vytvoriť súbor úloh na formovanie daného poznatku a vytvorenie schopnosti riešiť úlohy daného typu. Aby žiak mohol úlohy úspešne zvládnuť je potrebné postupne rozvíjať predstavu o permutáciách s opakovaním. Dôraz je kladený na poradie zadávania úloh.

SYSTEMATICKÝ SÚBOR PROBLÉMOVÝCH ÚLOH

Nasledujúca časť obsahuje súbor prípravných úloh (5) a súbor úloh pre rôzne formy kombinatorického myslenia (8) z kombinatoriky na efektívne formovanie poznatku (permutácie s opakovaním) prostredníctvom objavného procesu riešenia úloh rôznymi spôsobmi pri rôznych úrovniach kombinatorického myslenia a analýzu možných alternatív riešenia.

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY

Úloha 1: Evine heslo na počítači je DALIBOR, keďže Dalibor je jej kamarát, každý by ho mohol ľahko uhádnuť. Eva zamenila dve písmená. Koľkými spôsobmi to mohla urobiť. (Úloha z učebnice Žabka, J., Černek, P.: *Matematika pre 7. ročník ZŠ* str. 83)

V učebnici str. 83-85 sa vyskytujú podobné úlohy o heslách daného typu, pričom mená majú rôzne písmená.

Úloha 2: Koľko existuje rôznych hesiel zostavených z písmen mena Dalibor?

Úloha sa dostáva do kategórie „ Keď je možností priveľa“. Týmto nadpisom označili autori učebnice matematiky Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník OG 1. časť* str.88 kapitolu venujúcu sa systematickému vypisovaniu možností prípadne využívaniu zefektívnených postupov, výpočtov a stratégií.

Riešenie: uvádzané v ďalšej podkapitole

Úloha 3: Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť 20 rovnakých jabĺk medzi Janka a Marienku. (Úloha z učebnice Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník OG 2. časť* str. 92/14)

Riešenie:

1. Vypisovanie možností:

J	M
0	20
1	19
. . .	. . .
20	0

21 možností

Žiaci rýchlo pochopia, že stačí riešiť jedného z nich. Možností je 21.

2. Využitie systému „krúžok, palička“ (alternatívna verzia„ Stars and Bars “):
   Janko , Marienka

   možnosť : ○○○○|○○○○○○○○○○○○○○○○ J...4, M...16

   Prvky: 20 krúžkov a 1 palička, - paličku možno umiestniť 21 spôsobmi

   Krúžky predstavujú jablká, palička oddeľuje počty pre jednotlivých ľudí. V danom prípade to nie je veľmi efektívny postup, no vytvára určitú kognitívnu úroveň využiteľnú neskôr.

3. Využitie vzorca: P/(1,20)= $\frac{21!}{1!.20!} = 21$

Úloha 4: Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 2 rovnaké jablká a 3 rovnaké hrušky medzi Janka a Marienku? (Úloha z učebnice Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník OG 2. časť* str. 92/15)

Riešenie:

1. Vypisovanie možností:

J	Jab.	0				1				2			
	Hruš.	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
M	Jab.	2				1				0			
	Hruš.	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0

Žiaci rýchlo pochopia, že stačí riešiť jedného z nich. Možností je 12.

2. Využitie systému „krúžok, palička“ :
   Janko , Marienka

   1*možnosť jablká* : |○○ J...0, M...2 ...všetkých 3

   1*možnosť hrušky* : ○○|○ J...2, M...1 ...všetkých 4

- paličku možno umiestniť 3 spôsobmi pre jablká, 4 spôsobmi pre hrušky, každú možnosť skombinujeme s každou => 3.4 = 12 možností

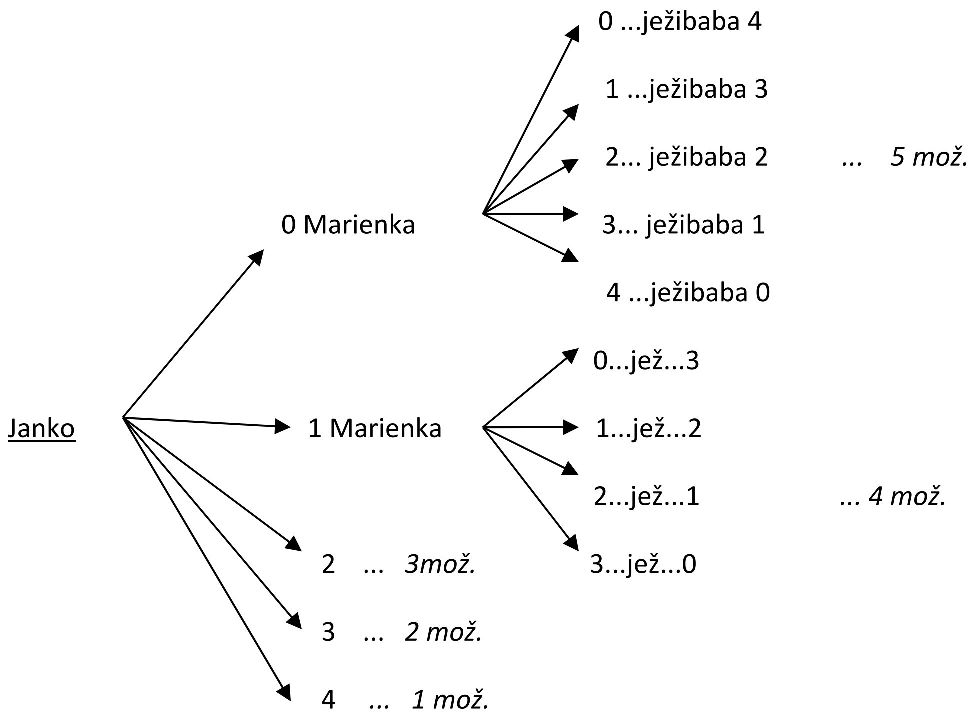
3. Využitie vzorca: - uplatňuje sa kombinatorické pravidlo súčinu.

   P/(1,2) .P/(1,3)= $\frac{3!}{1!.2!}.\frac{4!}{1!.3!} = 3.4 = 12$

Úloha 5: Koľkými spôsobmi sa dajú rozdeliť 4 rovnaké perníky medzi Janka, Marienku a ježibabu? (Úloha z učebnice Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník OG 2. časť* str. 92/16 úloha označená ako rozširujúca)

Riešenie:

1. Vypisovanie možností:



Žiaci pochopia, že ak ide o počet možností tak ježibaba závisí na vopred

Rozdelených perníkoch. Možností je 5+4+3+2+1=15.

- uplatňuje sa kombinatorické pravidlo súčtu.

2. Využitie systému „krúžok, palička"
   Janko, Marienka, ježibaba

   ○○○|○| ...$[3,1,0]$

   ○|○|○○ ...$[1,1,2]$

   Prvky: 4 krúžky a 2paličky

Krúžky predstavujú perníky, paličky oddeľujú počty pre jednotlivých ľudí.

Žiaci nevedia nájsť model pre usporiadanie šiestich prvkov, pričom dva prvky sú prvého druhu a štyri prvky druhého druhu . Cieľom práce je vytvorenie danej schopnosti.

3. Využitie vzorca: $P^{/}(2,4)= \frac{6!}{2!.4!}=\frac{6.5.4!}{2.4!}=\frac{30}{2}=15$

ZADANIA A RIEŠENIA ÚLOH PRE RÔZNE FORMY KOMBINATORICKÉHO MYSLENIA

Pri opakovaní učiva zo 7. roč. v 8. ročníku ZŠ a tercii OG žiaci riešia podobné úlohy. Tematický celok má názov : „Pripomíname si a niečo aj pridávame“ Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012. Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník OG 1. časť a tak pridaná oblasť zahŕňa permutácie s opakovaním. (Propedeutika daného pojmu.)

Úloha 1: Koľko existuje rôznych hesiel zostavených z písmen mena JANO?

Riešenie:

1. Vypisovanie možností:
   Bez systému: JANO, AJNO, JNAO, JAON, ...

   ...... pri veľkom počte možností žiak hľadá systém.....

   Systematicky stromovou metódou:

J – A –N - O	**A** – J –N - O	**N** – A –J - O	**O** – A –N - J
- O - N	- O - N	- O - J	- J - N
- N – A –O	- N – J –O	- J – A –O	- N – A –J
- O - A	- O - J	- O - A	- J - A
- O – A – N	- O – J – N	- O – A – J	- J – A – N
- N - A	- N - J	- J - A	- N - A

6.4=24 možností

2. Využitie kombinatorického pravidla súčinu a usporiadanej n-tice:
Bázická množina B= $\{J, A, N, O\}$

Pracovná množina M= $\{ \ [J, A, N, O], [N, O, J, A], \ldots \ \}$

Organizačný princíp Φ - Jedná sa o usporiadané štvorice z množiny zo štyroch prvkov. Na prvé miesto môžeme dosadiť prvok 4 spôsobmi, na druhé 3, na tretie 2 a na štvrté miesto nám zostal jeden. Každú možnosť s každou skombinujeme. $[J, A, N, O], [N, O, J, A], \ldots [\_,\_,\_,\_]$

4.3.2.1 = 24 možností

3. Využitie vzorca:

Žiaci si uvedomia ako skupiny tvoríme: záleží na poradí a prvky sa neopakujú.
Def. : Permutácia n- prvkovej množiny je každá usporiadaná n-tica vytvorená zo všetkých prvkov tejto množiny.

Počet všetkých permutácií n-prvkovej množiny je: P(n) = n ! = n.(n-1).(n-2). 3.2.1
(pre ZŠ $n \in N$)

$P^{/}(4)$= 4!= 4.3.2.1 = 24 možností

Úloha 2: Koľko existuje rôznych hesiel zostavených z písmen mena JANA?

Riešenie:

1. Vypisovanie možností:
   Bez systému: JANA, AJNA, JNAA, JAAN, ...

   ...... pri veľkom počte možností žiak hľadá systém.....

   Ak by boli á-čka odlišné, možností je ako v úlohe 1.

   Systematicky stromovou metódou:

J – A1 –N – A2	**A1** – J –N – A2	**N** – A1 –J – A2	**A2** – A1 –N - J
- A2 - N	- A2 - N	- A2 - J	- J - N
- N – A_1 –A_2	- N – J –A2	- J – A1 –A2	- N – A1 –J
- A_2 – A_1	- A2 - J	- A2 – A1	- J – A1
- A2 – A 1– N	- A2 – J – N	- A2 – A1 – J	- J – A1 – N
- N – A1	- N - J	- J – A1	- N – A1

Ale keďže sú rovnaké každá je započítaná dvakrát. Možností je 24 : 2 = 12

2. Využitie usporiadanej štvorice, permutácia:
   Bázická množina B=$\{J, A, N\}$

   Pracovná množina M=$\{\ [J, A, N, A], [N, A, J, A], \ldots\ \}$

   Organizačný princíp Φ - Jedná sa o usporiadané štvorice z dvoch prvkov prvého druhu jedného prvku druhého druhu a jedného prvku tretieho druhu . Uvažujeme, že prvky A sú odlišné, počet možností ako v úlohe 1. $[J, A1, N, A2], [J, A2, N, A1], \ldots [\_, \_, \_, \_]$

Bolo by 4.3.2.1 = 24 možností , ale každá možnosť je tam započítaná toľkokrát viac koľko existuje permutácií množiny s rovnakými prvka $[A1, A2], [A2, A1]$. Dve možnosti, každá je započítaná dvakrát. Možností je 24 : 2 = 12

3. Využitie vzorca:
   Žiaci si uvedomia ako skupiny tvoríme: záleží na poradí a určité prvky sa opakujú, a teda toľkokrát viac skupín by sme vytvorili, ak by sme rovnaké prvky odlíšili.

   Def.: Permutácia s opakovaním z n_1 prvkov prvého druhu, z n_2 prvkov druhého druhu atď.... až z n_k prvkov k-teho druhu, pričom $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, je každá usporiadaná n-tica, vytvorená z týchto prvkov.

počet permutácií s opakovaním je $P'(n_1, n_2, ..n_k) = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$

$P'(2,1,1) = \frac{4!}{2!.1!.1!} = \frac{4.3.2!}{2!} =$ 12 možností

Úloha 3: Koľko existuje rôznych hesiel zostavených z písmen mena HELENE?

Riešenie:

1. Vypisovanie možností:
   Bez systému: LEHENE, EELHNE, HENELE, ...

   ...... pri veľkom počte možností žiak hľadá systém.....

   Ak by boli E-čka odlišné, možností je 6!.

Ale keďže sú rovnaké každá možnosť je započítaná : HE1LE2NE3, HE1LE3NE2, HE2LE1NE3, HE2LE3NE1, HE3LE1NE2, HE3LE2NE1. 6-krát. Možností je 6!: 6 = 5! =120

2. Využitie usporiadanej šestice, permutácia:
   Bázická množina B= $\{H, E, L, N\}$

   Pracovná množina M= $\{ \ [HELENE], [HENELE], ... \ \}$

   Organizačný princíp Φ - Jedná sa o usporiadané šesticece z troch prvkov prvého druhu jedného prvku druhého druhu, jedného prvku tretieho druhu a jedného prvku štvrtého druhu. Uvažujeme, že prvky E sú odlišné, počet možností = 6!.

   $[\_,\_,\_,\_,\_,\_]$

Bolo by 6. 5.4.3.2.1 = 720 možností , ale každá možnosť je tam započítaná toľkokrát viac koľko existuje permutácií množiny s rovnakými prvkami $[E1, E2, E3], [E1, E3, E2], ...$. 3!=6 možností, každá je započítaná šesťkrát.

Možností je 720 : 6 = 120

3. Využitie vzorca:

Žiaci si uvedomia ako skupiny tvoríme: záleží na poradí a určité prvky sa opakujú, a teda toľkokrát viac skupín by sme vytvorili, ak by sme rovnaké prvky odlíšili, koľko existuje rôznych usporiadaní rovnakých prvkov. Takže n! musíme deliť $n_1!.n_2!. ... .n_k!$.

$$P'(n_1, n_2,..n_k) = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$$

$P^{/}(3,1,1,1) = \frac{6!}{3!.1!.1!1!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} =$ 120 možností

Úloha 4: Koľko existuje rôznych hesiel zostavených z písmen mena ZUZANA?

Riešenie:

$P^{/}(2,2,1,1) = \frac{6!}{2!.2!.1!1!} = \frac{6.5.4.3.2!}{2.2!} =$ 180 možností

Úloha 5: Koľko slov možno vytvoriť z písmen slova MATEMATIKA?

Riešenie:

$P^{/}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!.2!.3!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.2.3!} =$ možností

Úloha 6: Koľkými spôsobmi sa dajú rozdeliť 4 rovnaké perníky medzi Janka, Marienku a ježibabu?

Riešenie:

Už známu úlohu je schopný žiak vyriešiť použitím permutácií s opakovaním.

Janko, Marienka, ježibaba

$\circ\circ\circ \mid \circ \mid \qquad ...[3,1,0]$

$\circ \mid \circ \mid \circ\circ \qquad ...[1,1,2]$

Prvky dvoch druhov 4 krúžky a 2 paličky

Krúžky predstavujú perníky, paličky oddeľujú počty pre jednotlivých ľudí.

Usporiadanie šiestich prvkov, pričom dva prvky sú prvého druhu a štyri prvky druhého druhu. Počet rozdelenia

$P^{/}(2,4) = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2.4!} = \frac{30}{2} = 15$

Úloha 7: (SŠ)Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť 9 rovnakých mincí medzi 5 detí?

Riešenie: Využitie systému „krúžok, palička“

1. dieťa, 2., 3. ,4.

○○| |○○|○○○○○| .... tento model predstavuje možnosť rozdelenia: $[2,0,2,5,0]$

Prvky: 9 krúžkov a 4 paličky (o jedno menej ako detí, aby sa vytvorilo 5 skupín v usporiadaní)

Krúžky predstavujú mince, paličky oddeľujú počty pre jednotlivé deti. Týmto modelom sme schopný vytvoriť všetky možnosti.

P$^{/}$(9,4)= $\frac{13!}{9!.4!} = \frac{13.12.11.10.9!}{9.4!}$

Úloha 8: (SŠ)*Koľkými spôsobmi sa dá kúpiť 250g čaju, ak majú 4 rôzne druhy v balení po 50g?*

Riešenie: Využitie systému „krúžok, palička“

1. druh, 2., 3., 4.

○|○|○○|○ .... $[1,1,2,1]$

Prvky: 5 krúžkov a 3 paličky (o jedno menej ako druhov, aby sa vytvorili 4 druhy v usporiadaní)

Krúžky predstavujú balíčky po 50g, paličky oddeľujú počty pre jednotlivé druhy.

ZÁVER

V našom príspevku sme sa pokúsili načrtnúť možnosti práce učiteľa v dvoch odlišných tematických celkoch. V prvom bola inovácia vo využití IKT , konkrétne voľne prístupného didaktického programu GeoGebra a v druhom vo využití súhrnu úloh a systému „krúžok, palička“ v kombinatorike na zavedenie zložitého termínu : permutácie s opakovaním v nižšom sekundárnom vzdelávaní.

Prvá časť spája témy: kružnica, množina bodov danej vlastnosti a vzájomná poloha priamky a kružnice v predložených problémových úlohách, čo ich predurčuje byť vhodným nástrojom nielen na získanie poznatku v prípade daných situácií, ale aj na objavovanie súvislostí a diskusiu o metódach riešenia so žiakmi, prípadne na precvičovanie daného učiva v 8. ročníku ZŠ (tercii OG) . Súbory úloh sa dajú vhodne využiť aj ako pracovné listy na danom predmete, pre žiakov, ktorí hľadajú súvislosti a neuspokoja sa s jednoducho postavenou úlohou štruktúrovanou alebo overovacou (klasifikácia podľa Tafoya a kol.,1980) .

Téma permutácie s opakovaním v predložených problémových úlohách je dobrým základom pre témy: kombinácie a kombinačné čísla vo vyšších ročníkoch. Je vhodná nielen na získanie poznatku, ale aj na objavovanie vzťahov a diskusiu o alternatívach a spôsoboch riešenia so žiakmi, prípadne na precvičovanie učiva. Dôraz kladený na objavenie schémy, pravidla, nájdenie vzorca, pochopenie a objasnenie súvislostí medzi jednotlivými spôsobmi a rôznymi modelmi riešenia úloh, sa prejaví na úspešnom vytvorení poznatku a na vzbudení záujmu o podobné úlohy uplatňované v reálnom živote.

Uvedomujeme si, že zvolené tematické celky ,majú svoje špecifiká a každý je svojim spôsobom iný v prístupoch, no snaha o zavádzanie inovatívnych metód na riešenie problémových úloh ich do istej miery zjednocuje. Tiež predpokladáme, že vybrané úlohy sa predkladajú žiakom s vyššími poznávacími záujmami a schopnosťami. Pri zmenenej časovej náročnosti však uplatniteľné aj v rôznorodejšej skupine žiakov. Otvorenou otázkou zostávajú technické a časové možnosti.

Aj napriek naznačeným obmedzeniam možno predpokladať že využívanie inovatívnych metód a foriem vo vyučovacom procese je nielen motivujúce, atraktívne a kreatívne pre žiakov, ale prináša i výraznú efektivitu práce učiteľa a dynamizuje klasické vyučovanie. U žiakov sa inovatívne metódy stretávajú s pozitívnym postojom. Nielen preto považujeme za vhodné modernizovať vzdelávací proces.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

Bálint, Ľ., Balúchová, A., Černek, P. a kol.2010. Štátny vzdelávací program matematika príloha ISCED 2, ŠPÚ, Vytvorila a schválila ÚPK pre matematiku Bratislava 2010. Dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika

Fischbein, E., & Grossman, A. 1997. Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. In Educational Studies in Mathematics, 34(1), 27-47.

Hejný, M. a kol. 1999.Teória vyučovania matematiky 2, SPN Bratislava 1999,554 strán, ISBN 80-08-01344-3

Pavlovičová a kol.: 2012. Experimentujeme v elementárnej matematike, UKF FPV Nitra 2012

Kolektív autorov: Hravá matematika, Pracovný zošit z matematiky pre 7. ročník ZŠ a sekundu gymnázia, Tak-Tik Bratislava 2011

Kolektív autorov: Hravá matematika Pracovný zošit pre 8. ročník ZŠ a terciu OG, Taktik International, s.r.o., Košice 2011, 136 strán, ISBN 978-80-89530-02-1

Šedivý,O., Čeretková S., Malperová,M.,Bálint,Ľ. 2000. Matematika pre 8. Ročník ZŠ 1. Časť,SPN Bratislava 2000, 143 strán, ISBN 80-08-03031-3

Žabka, J., Černek, P. a kol. 2012. Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník OG 2. časť, Orbis Pictius Istropolitana Bratislava 2012, 143 strán, ISBN 978-80-8120-125-7

Žabka, J., Černek, P.: Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2.ročník gymnázií s osemročným štúdiom 2. časť, Orbis Pictus Istropolitana Bratislava 2011, ISBN 978-80-8120-050-2

www.ematik.sk študijné materiály ku kurzu 04 Teória didaktických situácií v príkladoch 2008

www.orbispictus.sk materiály k učebniciam matematiky pre učiteľov www.ukf.sk študijné materiály ku kurzu Inovácia metód a foriem vyučovania kombinatoriky pravdepodobnosti a štatistiky

ADRESA AUTORA

Mgr. Andrea Kotruszová
Piaristické gymnázium sv. J. Kalazanského Nitra
Piaristická ul. 6
949 01 Nitra
andrea.kotrusz@iceweb.sk