

TVORIVÁ GEOMETRIA A KOMBINATORICKÉ MYSLENIE ŽIAKOV ZŠ

LUCIA MOROVIČOVÁ

ABSTRAKT

Práca je rozdelená do dvoch častí. Prvá časť obsahuje 3 úlohy riešené pomocou programu GeoGebra. Konštrukcie sa dali vytvoriť použitím nástrojov: priamka, oblúk a dva body. Druhá časť je zameraná na kombinatorické myslenie žiakov 7. ročníka ZŠ a na analýzu chýb žiakov v konkrétnej úlohe.

ÚVOD

Práca s programom GeoGebra dáva učiteľom možnosť efektívne si pripraviť obrázky na akúkoľvek časť geometrie ZŠ aj SŠ.

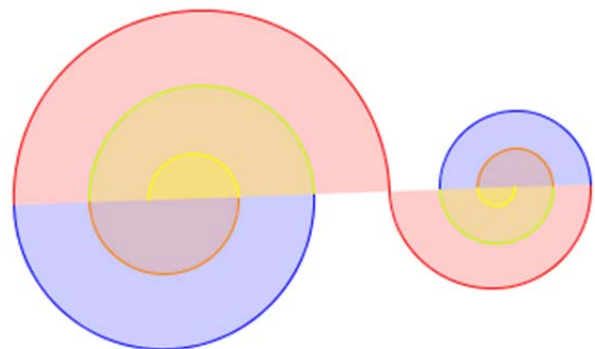
Kombinatorické myslenie žiakov na ZŠ prebieha na rôznych úrovniach (Fischbein & Grossman, 1997). Dôležitým faktorom ovplyvňujúcim toto myslenie je aj úroveň čitateľskej gramotnosti žiakov a ich sústredenosť na samotný text úlohy.

TVORIVÁ GEOMETRIA

Veľmi pozitívne hodnotím možnosť farebne vyznačiť najdôležitejšie prvky v danej konštrukcii. Počas práce s programom GeoGebra, má každý priestor aj na vlastnú fantáziu a tvorivosť. Moja fantázia je vyobrazená v nasledujúcich úlohách.

ÚLOHA „DOUBLE SNAIL“ DVOJITÝ SLIMÁK

Riešenie

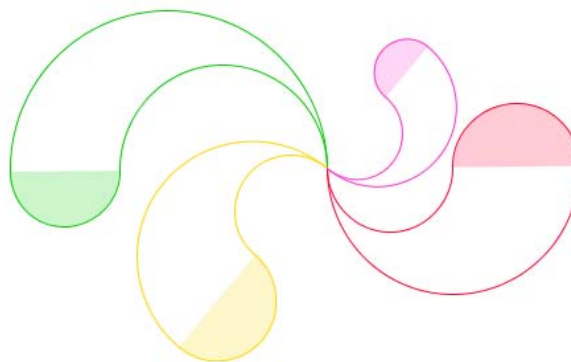


Obrázok 1 Double snail

Zdroj: vlastný zdroj

ÚLOHA „QUARTERFOIL“ ŠTVORLÍSTOK

Riešenie

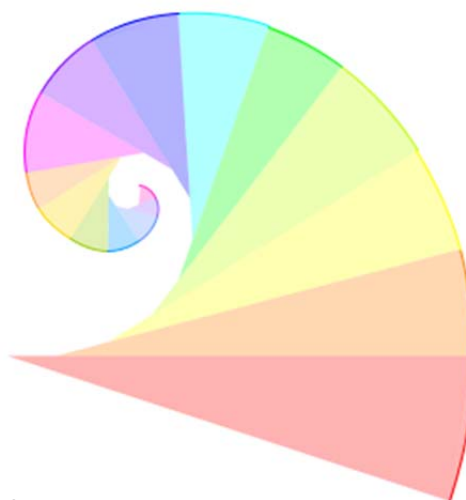


Obrázok 2 Quarterfoil

Zdroj: vlastný zdroj

ÚLOHA „RAINBOW SPIRAL“ DÚHOVÁ ŠPIRÁLA

Riešenie



Obrázok 3 Rainbow spiral

Zdroj: vlastný zdroj

Úloha „Double snail“ dvojitého slimáka a „Quarterfoil“ štvorlístka boli vymyslené. Posledná úloha bola vytvorená zo zvedavosti, či konštrukcia sa dá vytvoriť iba použitím nástrojov: priamka, oblúk a dva body. Výsledok ma milo prekvapil. Počas experimentovania s DGS GeoGebra s využitím rysovania oblúkov a kružníc, ktoré sa môžu spájať a vytvárať „oblúkové útvary“ rôznych tvarov som zistila, že nielen učiteľ, ale aj šikovnejší žiak by vedel vytvárať podobné jednoduché obrázky.

KOMBINATORICKÉ MYSLENIE ŽIAKOV ZŠ

„Kombinatorické myslenie je budované na schopnosti organizovať prvky množiny do prehľadných tabuliek, grafov, schém a zoznamov.“ (Hejný, M. a kol., 1989, s.472)

Už žiaci na 1. stupni vedia usporiadať napr. hrnčeky do poličky (vždy inak) alebo dokončujú farebné kombinácie pásov na zástavách. Neuvedomujú si však, že táto činnosť priamo súvisí s ich kombinatorickým myslením.

Na 2. stupni sa žiaci v tematickom okruhu Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika naučia systematicky vypisovať možnosti a zisťovať ich počet, čítať a tvoriť grafy, diagramy a tabuľky dát, rozumieť bežným pravdepodobnostným a štatistickým vyjadreniam.

Podľa ISCED2 **Kombinatorika v úlohách pre 7. ročník** obsahuje:

Úlohy na tvorbu skupín predmetov a ich počte z oblasti rôznych hier, športu a z rôznych oblastí života (propedeutika variácií). Rôzne spôsoby vypisovania na jednoduchých úlohách (bez podmienok; využiť pravidlo súčtu). Objavovanie možností a zákonitostí. Pravidlo súčinu. Úlohy s podmienkami (propedeutika základných modelov kombinatoriky). Riešenie jednoduchých kombinatorických úloh (na základe hier a pokusov). Riešenie kombinatorických úloh rôznymi metódami (stromový diagram, stromový graf), príprava tabuliek, systematické vypisovanie možností).

Cieľom kombinatoriky v 7. ročníku je, aby žiak vedel:

- ✚ pokračovať v systéme vypisovania všetkých prípadov
- ✚ v rôznorodých úlohách nájsť spoločnú matematickú podstatu
- ✚ v jednotlivých úlohách objaviť spôsob tvorenia možných riešení
- ✚ systematicky vytvárať všetky možné riešenia
- ✚ riešiť rôzne primerané kombinatorické úlohy.

Cieľom tejto práce je stanoviť si vo vytvorenej úlohe čo je bazová, pracovná množina a aký je jej organizačný princíp Φ . Vytvorená úloha bola zostavená pre žiakov 7. ročníka. Cieľom je tiež ukázať ako si žiaci poradili s vypracovaním úlohy rozvíjajúcej ich kombinatorické myslenie. Súčasťou práce sú aj samotné práce žiakov počas ich písomnej odpovede.

Kombinatorické myslenie žiakov na ZŠ prebieha na rôznych úrovniach (Fischbein & Grossman, 1997) :

- ✚ Úroveň 1: vymenovanie prvkov v náhodnom poradí, bez hľadania systematickej stratégie
- ✚ Úroveň 2: využívanie metódy pokus - omyl, objavenie nejakých postupov pri práci s malým počtom prvkov
- ✚ Úroveň 3: systematické vypisovanie, používanie vzorcov (len u niektorých žiakov)

Obsahom zostavenej samostatnej práce žiakov boli úlohy s kombinatorickou motiváciou a ich riešenie rôznymi spôsobmi. Práca obsahovala 4 úlohy, na vypracovanie ktorých mali žiaci 20 minút (viď. príloha). V tejto práci som sa zamerala na analýzu prvej úlohy.

Úloha 1

Oslava 18. narodenín u Lenky bola veľká. Prišli aj jej 4 kamarátky, ktoré si navzájom štrngli s Lenkou so šampanským. Koľko bolo počť štrngnutí, ak si štrngla každá s každou? Rieš úlohu ľubovoľným spôsobom.

Riešenie

Cieľom bolo zistiť, či žiak vie zo zadania úlohy zistiť :

- ✚ čo je základná množina prvkov (bázová množina B),
- ✚ či vie aké pravidlá musíme stanoviť, ak budeme vytvárať skupiny prvkov z danej základnej množiny (pracovná skupina S)
- ✚ ako možno zapísať alebo znázorniť všetky možnosti vytvorených skupín (organizačný princíp Φ)

Bázová množina B: $B = 5$ (Lenka a jej 4 kamarátky)

Pracovná množina S: Hľadáme dvojice, pri ktorých nezáleží na poradí prvkov (poradí v akom si dve kamarátky navzájom štrngnú). To znamená, že napr. dvojica Lenka a 1. kamarátka je tá istá ako dvojica 1. kamarátka a Lenka. Štrngnú si len 1 krát.

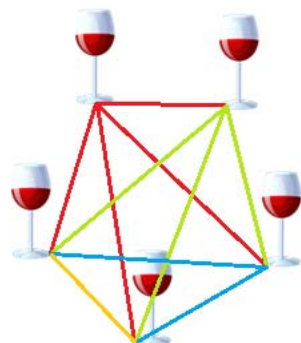


Obrázok 4 Štrngnutie dvoch pohárov

Zdroj: internet

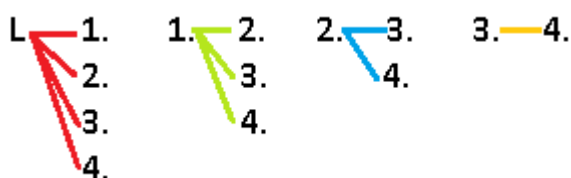
Organizačný princíp Φ : Úloha sa dala riešiť niekoľkými spôsobmi.

1.spôsob: **obrázkom**



$$4+3+2+1 = 10 \text{ štrngnutí}$$

2.spôsob: **stromový graf**



$$4+3+2+1 = 10 \text{ štrngnutí}$$

Obrázok 5 - 6 Znázornenie obrázkom - stromový graf

Zdroj: vlastný obrázok

3. spôsob: *tabuľkou*

	Lenka	1.	2.	3.	4.
Lenka		□	□	□	□
1.			□	□	□
2.				□	□
3.					□
4.					

$$4+3+2+1 = 10 \text{ štrngnutí}$$

4. spôsob: *výpočtom* ($n=5$)

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{5 \cdot (5-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ štrngnutí}$$

Žiaci mali možnosť riešiť úlohu ľubovoľným spôsobom. Pozrime si niektoré ich riešenia:

Žiak č.1:

①

10 štrngnutí

Na Lenkinej ohave zaznie 10 štrngnutí.

výpočet:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = \underline{\underline{10}}$$

Žiak č.2:

①

$4+3+2+1=10$

$4 + 3 + 2 + 1 = \underline{\underline{10}}$

Žiak č.3:

~~$1+3+4+2=10$~~
 ~~$4+3+2+1=10$~~
 Bolo päť 10 štrngmuli.

Žiak č.4:

4
 $L \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right.$
 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$
 Štrngmuli bolo 10.

Žiak č.5:

1
 $L \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ kam.} \\ 2. \text{ kam.} \\ 3. \text{ kam.} \\ 4. \text{ kam.} \end{array} \right.$
 $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$
 Bolo počít 10 štrngmuli.

Analýza riešení žiakov:

Úroveň kombinatorického myslenia tejto úlohy zaraďujem do úrovne 2-3. Riešenie žiakov bolo rôznorodé. Žiaci č.1 a č.5 riešili graficky pomocou **stromového grafu**. Graficky znázornili všetky možné výsledky. Žiak č.4 tiež použil stromový graf, žiaľ nevedomil si, že používa stále tú istú osobu Lenku. Jeho grafické riešenie je preto nesprávne. Žiak č.2 riešil úlohu dvomi spôsobmi (stromovým grafom aj pomocou obrázku). Ukázal viac možností riešenia príkladu podobne, ako žiak č.1. Ten pri riešení použil nielen metódu stromového grafu ale aj **výpočet pomocou vzorca** $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Nesprávne riešenia niektorých žiakov:

Žiak A:

nesprávny spôsobom

①

$4 + 3 + 2 + 1 = 10$



Bob počul 24 štrngmedí

Žiak B:

① $4 + 1 = 5$

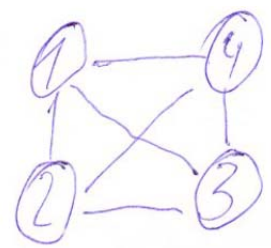
1-2-3-4-5

$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Bob počul 15 štrngmedí

Žiak C:

①



$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

Bob počul 6 štrngmedí

Analýza chýb žiakov A, B a C:

Žiaci A a C nečítali s porozumením, preto urobili chybu pri určovaní *bázovej množiny B*. Namiesto piatich prvkov si vytvorili množinu len zo štyroch prvkov. Ak by žiak C neurobil túto chybu (pri určovaní *bázovej množiny*), jeho riešenie by podľa obrázku bolo správne. Uvedomoval si, že nezáleží na poradí a vedel, že dve kamarátky si môžu štrngnúť iba raz.

Žiak B si správne určil *bázovú množinu B = 5*. Žiaľ nevedomil si, že oslávenec Lenka si neštrngne sama so sebou. Ak by použil napr. stromový graf, túto chybu by neurobil. Jeho riešenie by som zaradila do úrovne 1.

ZÁVER

Úloha „Double snail“ dvojitého slimáka a „Quarterfoil“ štvorlístka boli vymyslené. Posledná úloha bola vytvorená zo zvedavosti, či konštrukcia sa dá vytvoriť iba použitím nástrojov: priamka, oblúk a dva body. Výsledok ma milo prekvapil. Počas experimentovania s DGS GeoGebra s využitím rysovania oblúkov a kružníc, ktoré sa môžu spájať a vytvárať „oblúkové útvary“ rôznych tvarov som zistila, že nielen učiteľ ale aj šikovnejší žiak by vedel vytvárať podobné jednoduché obrázky. Možno práve tento program otvorí možnosti jeho využitia napr. v záujmových krúžkoch na ZŠ a SŠ.

Z výsledkov riešení žiakov bola urobená analýza. Úloha bola zvládnutá na 73%. S výsledkom som spokojná. Na hodinách žiaci riešili úlohy podobného typu. Zadanie úlohy nebolo nikdy špecifikované „na štrngnutie“ ale napr. na podanie rúk, dvojica týždenníkov, atď. Pričom sa menil ich počet (bázová množina B). Na hodinách boli žiakom ponúknuté všetky možnosti riešenia úloh tohto typu (obrázkom, stromovým grafom, tabuľkou aj výpočtom). Po analýze samostatnej práce a samotnej úlohy som dospela k záveru, že žiakom 7. ročníka pri úlohách tohto typu najčastejšie vyhovuje riešenie pomocou stromového grafu. Nie je však našim cieľom, aby každý žiak ovládal všetky spôsoby riešenia. Cieľom je, aby si každý žiak dokázal vybrať ten, ktorý je najbližší jeho spôsobu uvažovania a jeho predstavivosti.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

Bálint, Ľ., Balúchová, A., Černek, P. a kol. 2010. Štátny vzdelávací program: Matematika. Bratislava : Štátny pedagogický ústav. 2010, 45 strán, dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/iscsed2/vzdelavacie_oblasti/matematika_iscsed2.pdf, citované dňa 31. 1. 2013

Berová, Z, Bero, P. 2012. *Zošit pre učiteľa – Pomocník z matematiky pre 7. ročník ZŠ*. Bratislava : Orbis Pictus Istropolitana, s.r.o., 2011. ISBN 978-80-8120-151-6

Fischbein, E., & Grossman, A. 1997. Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. In *Educational Studies in Mathematics*, 34(1), 27-47.

Euklidove vajce: <https://amos.ukf.sk/mod/resource/view.php?id=7495>

Hejný, M. a kol. 1989: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. 1989. ISBN 80-08-00014-7

Šedivý, O, Čeretková, S, Malperová, M, Bálint, Ľ, 1999: *Matematika pre 6.ročník základných škôl 2.časť*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. 1999. ISBN 80-08-02678-2

<http://www.sashe.sk/nadyka/detail/zalubene-pohare-na-sampanske-1>

ADRESA AUTORA

Mgr. Lucia Morovičová
ZŠ Gejzu Dusíka
Mierová 1454/10
924 01 Galanta
mo.lucia@gmail.com