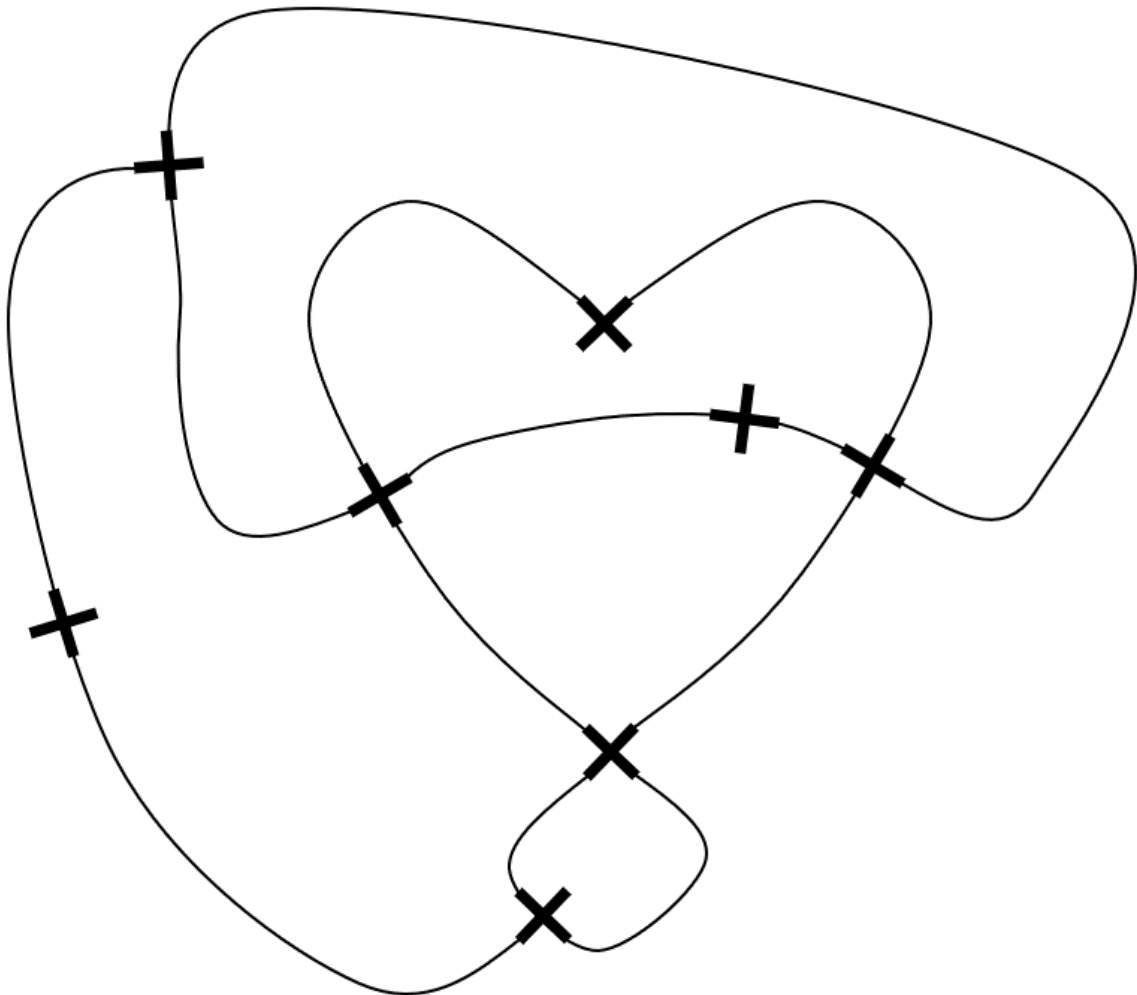


# Spoj a panuj



## Matematický B-deň 2019

Univerzita v Utrechte  
Holandsko

Freudenthalov inštitút

Univerzita Konštantína Filozofa  
v Nitre

Fakulta prírodných vied  
Katedra matematiky



# Úvod

## O zadaní

Tohtoročné zadanie Matematického B-dňa je o niečom, čo všetci radi robíme: víťazstve v hre. Niekedy je k výhre potrebná trocha šťastia, ale pre hru, ktorú dnes budete hrať, to celkom neplatí ...

## Práca v tímoch

Zvláštnosťou Matematického B-dňa je to, že matematikou sa budete zaoberať v tíme. Riešenie jednotlivých úloh si vhodne naplánujte alebo rozdeľte medzi seba. Nechajte každého člena tímu urobiť to, v čom je v matematike dobrý. Pokúste sa dať každému členovi vášho tímu priestor, aby k riešeniu prispel vlastnými nápadmi.

## Štruktúra dňa

Matematický B-deň pozostáva zo základných úloh a zo záverečného zadania. Pokúste sa stráviť približne polovicu času riešením úloh záverečného zadania.

## Pomôcky

Dnes budete potrebovať: pero, dostatok papiera (na črtanie a kreslenie), nožnice, lepidlo, lepiacu pásku, zošívачku alebo kancelárske spinky na pripevnenie listov papiera k sebe a počítač alebo laptop, na ktorom napíšete vaše riešenie, vašu záverečnú správu. Používanie internetu je povolené (v správe uveďte webovú adresu, ak z niektorej webovskej stránky budete čerpať pojmy a myšlienky), ale nie je to nevyhnutné, pretože nás zaujíma predovšetkým vaša práca.

## Čo odovzdáte?

Počas celého dňa budete pracovať na správe, opise vašich riešení, ktorú odovzdáte v elektronickej podobe. Správu o vašich riešeniach nezačnite písať príliš neskoro, pretože ju musíte ešte dnes poslať e-mailom na adresu: [tabletmatematikaukf@gmail.com](mailto:tabletmatematikaukf@gmail.com) do 16:30.

V správe opíšete svoje výsledky a zdôvodnenia riešení úloh a riešenie záverečného zadania. Akceptujeme, ak niektoré vaše tvrdenia nebudú úplné. Dôraz pri hodnotení je kladený na váš originálny výskum v záverečnom zadaní.

V správe rozpovedzte váš vlastný jasný a presvedčivý príbeh. Oceníme dobre napísané, jasné, presné, úplné a starostlivo formulované a originálne, tvorivé správy. Matematický obsah riešení a spôsob, štýl, akým je správa napísaná, budú hrať pri hodnotení dôležitú úlohu!

## Tipy na správny štýl písania a na štruktúru správy:

- môže byť užitočné začať písať vypracovanie základných úloh už hneď *dopoludnia*,
- *zrozumiteľnosť*: každý, kto sa nezúčastnil na Matematickom B-dni a nepozná zadanie, ale má dostatočné vedomosti z matematiky, by mal byť schopný vašej správe porozumieť,
- ak sa pri riešení úloh opierate o vlastné tvrdenia, dostatočne podrobne ich vysvetlite, objasnite a (to je dôležité), čo najviac využívajte *matematickú argumentáciu*,
- na ilustráciu svojich nápadov použite *vlastné opisy, grafy a obrázky*.

Do správy zakomponujte kópie obrázkov, ktoré si vytvoríte (snímky obrazovky alebo fotografie riešení na papieri).

## Základné úlohy

Dnes budete pracovať s hrou *Spoj-a-panuj*. V zadaniach sú opísané rôzne varianty hry, preto venujte pozornosť tomu, o ktorý variant hry ide. Prvá verzia hry začína dvoma znamienkami + (pozri Obrázok 1).



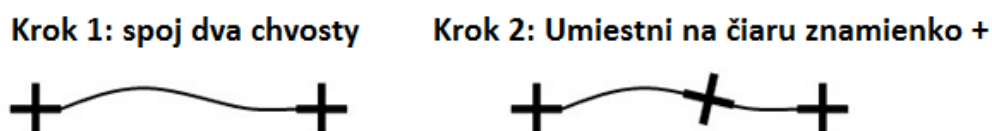
Obrázok 1. Začiatok hry

Na každé znamienko + sa môžete pozeráť ako na bod, uzol, so štyrmi chvostmi. Budeme ho nazývať 4-uzol. Celkovo je teda v začiatočnej situácii hry, na obrázku 1, osem chvostov.

### Pravidlá hry

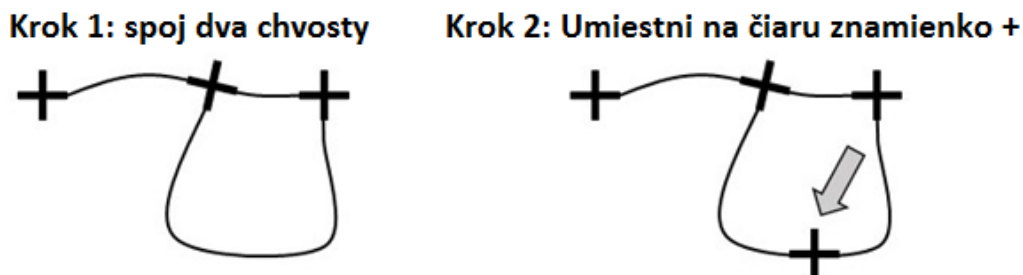
Hru hrajú dvaja hráči, striedajú sa v ťahu. Ťah pozostáva zo spojenia dvoch rôznych chvostov (z toho istého uzla alebo z dvoch rôznych uzlov). Na spojovaciu čiaru hráč, ktorý je na ťahu, nakreslí čiaru a umiestni na túto čiaru nové znamienko +. Spojovacia čiaru musí byť nakreslená bez toho, aby hráč zdvihol pero z papiera. To znamená, že na každej strane pridaného znamienka vznikne nový chvost a ostatné dva chvosty budú ležať na spojovacej čiare.

Po prvom ťahu je situácia ako na obrázku 2.



Obrázok 2. Príklad obrázku hry *Spoj-a-panuj* po prvom ťahu.

V nasledujúcom ťahu sa opäť spoja dva nepoužité, voľné, chvosty a na spojovaciu čiaru sa umiestni znamienko +; dostaneme napríklad situáciu na Obrázku 3:



Obrázok 3. Príklad výsledku hry *Spoj-a-panuj* po druhom ťahu

Hra pokračuje spájaním vždy dvoch nepoužitých chvostov spojovacou čiarou. Je potrebné dodržať ďalšie pravidlo: **spojovacia čiara sa nemôže krížiť ani pretínať už existujúcu čiaru, uzol alebo chvost**. Takže chvost označený na obrázku 3 nemôže byť nikdy pripojený k inému chvostu. Skontrolujte!

Hráč, ktorý ako prvý nemôže vykonať ťah, pretože už nie je možné spojiť dva chvosty bez pretnutia spojovacích čiar, prehral.

Počiatkové uzly sa môžu líšiť počtom chvostov (pozri nižšie). Na nové spojovacie čiary sa vždy zakreslí iba znamienko + a zakreslí vždy kolmo na čiaru tak, aby z neho zostali voľné iba dva chvosty.

**Skúmanie.** Zahrajte si niekoľkokrát hru, začnite s rôznymi počiatkovými uzlami podľa tvarov uvedených nižšie. Výsledky tohto skúmania (a nasledujúcich skúmaní) nemusíte v správe opisovať a uvádzať.



Dva 4-uzly

Jeden 8-uzol

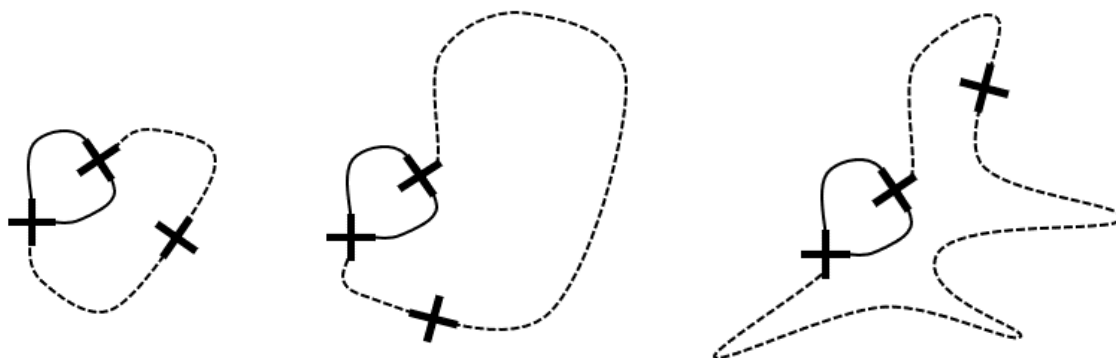
3-uzol a 4-uzol

Vyzerá to tak, že hra sa vždy zastaví sama od seba, a že bez ohľadu na to, ako hráte, musíte pre každú začiatkovú tvar uzlov hrať rovnako dlhý čas. Výzvou pre vás bude zistiť o tejto hre čo najviac. Budete experimentovať a svoje zistenia zdôvodňovať.

Začnime skúmaním jednoduchšej situácie: začiatková situácia je jeden 4-uzol. Je zrejmé, že nie je veľa možností, ako sa hra vyvinie.

**Úloha 1 (Opis).** Napíšte podrobný opis všetkých spôsobov, ako sa môže hra s jedným uzlom v začiatkovej situácii vyvíjať.

Opis, ktorý je riešením úlohy 1, nebude obsahovať nekonečne veľa riešení, pretože, napríklad, spojovacie čiary zakreslené bodkovanými čiarami sú, z hľadiska pravidiel hry, totožné.



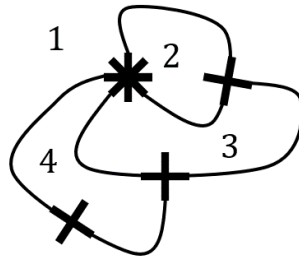
Zdá sa, že pre priebeh hry nie je podstatné, ako hra hrá, kadiaľ *presne* prebiehajú čiary a kde *presne* končí nový uzol a chvosty.

**Úloha 2 (Pohyb okolo čiar a uzlov).** Preskúmajte, či je pre hru dôležité, či sa pohybujete okolo čiary alebo okolo uzla (ktorý bol nakreslený v predchádzajúcich ťahoch) bez toho, aby

sa ďalšie čiary a uzly nakreslením novej spojovacej čiary preťali. Svoje zistenia podložte argumentmi.

Uvažujme počiatočné situácie hry iba s jedným uzlom. Namiesto jedného 4-uzla alebo 8-uzla môžeme vo všeobecnosti uvažovať aj o hre, ktorá sa začína  $d$ -uzlom: uzlom s  $d$  chvostami. Dokážete vopred pre každú hodnotu  $d$  určiť toho z dvoch hráčov, ktorý vyhrá? Výzvou nech je pre vás nájsť odpoveď túto otázku a výsledku dobre porozumieť.


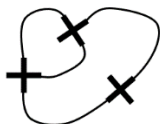
Zdá sa, že je užitočné pozeráť sa nielen na uzly a chvosty, ale aj na *oblasti*, ktoré v hre medzi spojovacími čiarami vzniknú. Na začiatku hry vychádzame z jednej oblasti: celej roviny, na ktorej sa hra hrá. Na obrázku 4 je fáza hry so štyrmi oblasťami.



Obrázok 4. Situácia hry, v ktorej sú štyri oblasti a osem nepoužitých chvostov

Počas každej fázy hry sú na obrázku *použité* a *nepoužité* chvosty. Nepoužitý chvost je ten, z ktorého nevychádza žiadna spojovacia čiara.

**Úloha 3 (výskum pomocou tabuľky).** Vytvorte tabuľku, ktorá opisuje, aký je vzťah medzi počtom nepoužitých chvostov a počtom oblastí počas hry, ktorá začína jedným  $d$ -uzlom. Svoje pozorovanie vysvetlite.

Stav hry	Počet ťahov $z$	Počet nepoužitých chvostov $d$	Počet oblastí $g$
+	0	4	1
	1	...	2
	2	...	...
...	...	...	...

Počet nepoužitých chvostov  $d$  je tzv. *invariantný*: tento počet sa nemení. Počet presunov  $z$  mínus počet oblastí  $g$ , t.j.  $z - g$ , je tiež nemenný, je invariantný.

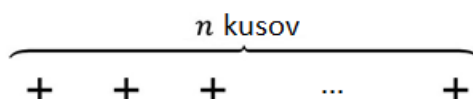
Zistíte, že situácie, keď na konci hra dosiahne počet ťahov  $z$ , počet oblastí  $g$  a počet nepoužitých chvostov  $d$ , sú skutočne kompatibilné.

#### Úloha 4 (Vzorec pre počet ťahov).

- Nájdite vzorec pre počet ťahov v hre, ktorá sa začína jedným  $d$ -uzlom a vysvetlite, či vyhrá prvý alebo druhý hráč.
- Vysvetlite, prečo je váš vzorec správny. Vysvetlite tiež, prečo sa hra skončí po príslušnom počte ťahov a prečo je vždy možné urobiť najmenej jeden ťah.

Prvá misia bola splnená! Ale ešte sme neskončili. Všetky úlohy ste riešili iba pre hry, ktoré začínajú iba jedným uzlom. A čo hry začínajúce viacerými uzlami?

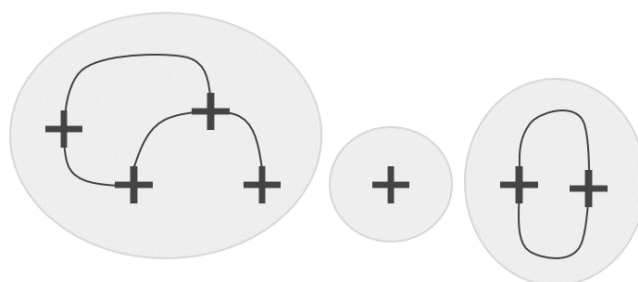
Teraz budeme chvíľu venovať pozornosť hrám, ktoré začínajú iba 4-uzlami. Počet 4-uzlov v počiatočnej situácii hry označíme  $n$ .



Obrázok 5. Počiatočná situácia hry s  $n$  4-uzlami

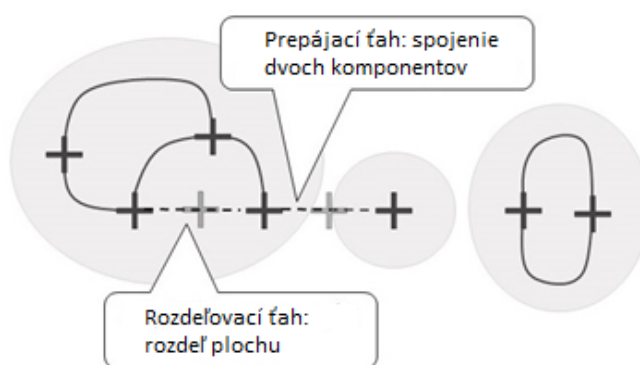
**Skúmanie.** Zahrajte si hru, ktorá má na začiatku tri 4-uzly. Je váš vzorec z riešenia úlohy 4a stále pravdivý? Dokážete predpovedať, kto vyhrá v tejto počiatočnej situácii?

Ak hra začína viacerými uzlami, počas hry nastane situácia, že uzly sú zoskupené do rôznych skupín. Tieto skupiny nazývame *komponenty* (pozri Obrázok 6) a počet komponentov označujeme  $c$ .



Obrázok 6. Príklad: tri komponenty (situácia pre hru, v ktorej boli na začiatku štyri 4-uzly)

Počas hry spájame dva nepoužitú chvosty v každom ťahu. Ak dva chvosty novej spojovacej čiary patria do dvoch rôznych komponentov, počet komponentov sa zníži o jeden. Takýto ťah nazveme *prepájací ťah*. Ak dva chvosty patria do toho istého komponentu, oblasť sa rozdelí na dve časti a ťah nazveme *rozdeľovací ťah*.



Obrázok 7. Príklad prepájacieho ťahu a rozdeľovacieho ťahu

**Úloha 5 (Výskum tabuľkou II.).** Vyplňte nižšie uvedenú tabuľku až po posledný ťah. Hrá sa hra s dvoma 4-uzlami. Vytvorte podobnú tabuľku pre hru s tromi 4-uzlami. Neváhajte použiť svoju vlastnú hru namiesto uvedených hier.

Situácia v hre	Počet ťahov $z$	Rozdeľovací (R)/ prepájací (P) ťah	Počet nepoužitých chvostov $d$	Počet komponentov $c$	Počet oblastí $g$
	0		8	2	1
	1	P	8	1	1
	2	R		...	...
...	...	...	...	...	...

Zdá sa, že počet ťahov je pevne stanovený aj pre počiatočnú situáciu hry s viac ako štyrmi 4-uzlami.



### Úloha 6 (Vzorec pre počet ťahov II).

a. Nájdite vzorec pre počet ťahov v hre s  $n$  4-uzlami a použite tento vzorec na vysvetlenie, ktorý hráč vyhrá.

b. Vysvetlite, ako zistíte odpoveď na otázku v bode a. Môžete použiť svoje pozorovania:

- o počte prepájacích a rozdeľovacích ťahov,

- kedy hra pokračuje a kedy končí (pozor na počet chvostov a počet oblastí).

### Úloha 7 (Odôvodnenie invariantov).

Vysvetlite, prečo je výraz  $z + c - g$  invariantný (to znamená: vzorec má rovnaký výsledok pre každý ťah, nemení sa). Ak to chcete urobiť, pozrite sa osobitne na to, čo sa deje pri rozdeľovacom ťahu a prepájacom ťahu. Vysvetlite vzorec z úlohy 6a. pomocou tohto invariantu.

**Skúmanie.** Hrajte sa a skúmajte niektoré hry, ktoré majú počiatočnú situáciu s rôznymi typmi uzlov, napríklad ako na obrázku 8. Dokážete predpovedať počet ťahov iba na základe celkového počtu chvostov  $d$  a počtu uzlov  $n$ ?

**Úloha 8 ( $n$  uzlov).** Preskúmajte, kto vyhrá hru, ak začínate  $n$  uzlami, ktoré môžu mať rôzny počet chvostov,  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ . Pozrite sa na situáciu na Obrázku 8. Zrozumiteľne vysvetlite, ako ste prišli k svojim výsledkom.



Obrázok 8. Počiatočná situácia  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 3$ ,  $d_3 = 8$  en  $d_4 = 4$ . Ktorý hráč vyhrá?

## Závěrečné zadania

Po predchádzajúcich základných úlohách si pozorne prečítajte tri možné záverečné zadania. Najprv si pozrite všetky tri návrhy záverečného zadania a potom si vyberte aspoň jedno zadanie z navrhovaných troch. Môžete si, samozrejme, zvoliť viac ako jedno záverečné zadanie.

## Závěrečné zadání 1: Spoj-a-panuj pomocí divoké karty

Na základě vyřešení prechádzajúcich úloh a pozorování ste zistili, že od začiatku je isté, ktorý hráč v hre *Spoj-a-panuj* vyhrá, či sa to hráčom páči alebo nie. V tomto závěrečnom zadání budete skúmať taký variant hry *Spoj-a-panuj*, v ktorom viac záleží na ťahoch jednotlivých hráčov a hra sa tak stane sa viac skutočnou.

Pravidlá sú rovnaké ako v štandardnej hre *Spoj-a-panuj*, až na to, že v hre dôjde k použitiu divokej karty: v jednom bode môže jeden z hráčov vykonať ťah, v ktorom na novej spojovacej čiare nebude nakreslené žiadne znamienko +. Hráči sa môžu sami rozhodnúť, či a kedy budú hrať s divokou kartou, ale akonáhle sa každý z nich využije divokú kartu, obaja hráči môžu už potom robiť iba štandardné ťahy.

**Úloha 1 (Na výbere záleží).** Ukážte, že výber hráčov, kedy použiť divokú kartu v hre v skutočnosti ovplyvní, ktorý hráč vyhrá.

a) Uveďte príklad hry, v ktorej vyhrá prvý hráč.

b) Uveďte príklad hry s rovnakou začiatočnou situáciou, v ktorej vyhrá druhý hráč.

**Úloha 2 (Kto vyhrá?).** Preskúmajte čo najviac rôznych začiatočných situácií. Kto vyhrá danú hru, ak obaja hráči hrajú čo najlepšie? Opíšte svoje zistenia!

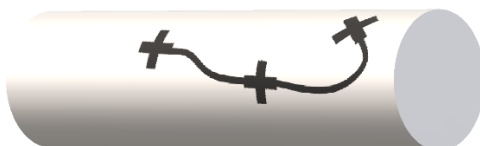
Hra je zaujímavejšia, ak obaja hráči môžu urobiť jeden ťah divokou kartou (alebo jeden hráč využije dve divoké karty, ak druhý hráč nevyužije svoju šancu s divokou kartou).

**Úloha 3 (Dva ťahy divokými kartami.)** Preskúmajte variant hry, keď každý hráč má k dispozícii dva ťahy divokou kartou. Opíšte toľko rôznych východiskových situácií, koľko je možné a zdôvodnite, kto vyhrá danú hru, ak obaja hráči hrajú čo najlepšie. Jasne a zrozumiteľne opíšte svoje zistenia!

## Závěrečné zadanie 2: Povrchy

V tomto závěrečnom zadaní sa budete zaoberať podrobnejšie hrou, ktorú ste už hrali predtým. K hre pridáme matematickú situáciu.

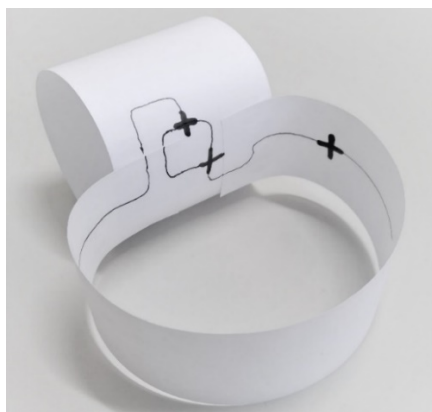
Zrolujte hárok papiera do valca a zlepte (lepidlom, lepiacou páskou, spinkami alebo kancelárskymi sponkami), pozri obrázok 9.



Obrázok 9. Hra sa hrá na valci

**Skúmanie.** Hrajte hru na vonkajšej strane, na plášti, valca. Vyberte si ľubovoľné počiatkové situácie. Na vnútornú stranu papiera prejsť nemôžete. Preskúmajte, či je priebeh hry iný ako na plochom hárku papiera, na ktorom ste hrali doteraz.

Potom vytvorte dva valce, ktoré sú približne rovnakej veľkosti. Spojte ich ako na obrázku 10.



Obrázok 10. Spoj-a-panuj na dvoch prepojených valcoch.

**Skúmanie:** Hrajte hru niekoľkokrát s jedným začiatočným 4-uzlom na spojených valcoch. Je víťaz hry vopred jasný?

Niekedy môžete urobiť taký ťah na spojených valcoch, ktorý nie je ani prepájacím, ani rozdeľujúcim ťahom. Tento typ ťahu nazývame posunom nahor (skrátene *topologický ťah*). Pre topologické ťahy už výraz  $z + g - c$  nie je invariantný (ako pri hre *Spoj-a-panuj* v rovine). Zdá sa, že sa by bolo vhodné topologické ťahy podrobnejšie preskúmať. Označte  $g_0$  počet oblastí, v ktorých nie sú k dispozícii žiadne topologické ťahy. Označte  $g_1$  počet oblastí, v ktorých je možný jeden topologický ťah;  $g_2$  bude počet oblastí, v ktorých existujú dva topologické ťahy, atď.

### Zadanie 1 (Výhra na dvojtom valci.)

- Preskúmajte, ktorý hráč vyhrá na dvojtom valci, ak hra začne jedným 4-uzlom.
- Preskúmajte, ktorý hráč vyhrá v hre s  $n$  uzlami s rôznym počtom chvostov, povedzme  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ . Skúmanie urobte pre čo najväčší počet možných kombinácií.

Teraz je však hra už úplne voľná. Aký bude priebeh hry, ak sa oblasť rozšíri o ďalší valec (pozri obrázok 11)?



Obrázok 11. *Spoj-a-panuj* na troch prepojených valcoch.

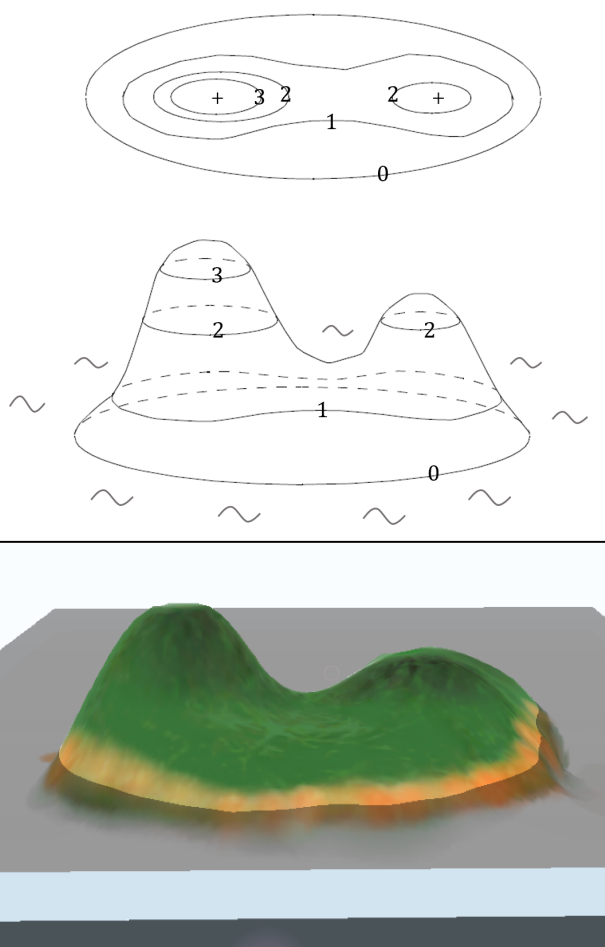
**Úloha 2 (Úlohy s ešte väčším počtom zákrut.)**. Skúmajte, ktorý hráč vyhrá v hre, ktorá sa hrá na povrchu s  $l$  slučkami (prepojenými valcami), ktoré sú spojené napríklad s  $n$  4-uzlami a prípadne aj s rôznym počtom chvostov  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ .

## Závěrečné zadanie 3: Údolie hlboké, hora vysoká

V treťom záverečnom zadaní vám predstavíme nový problém, ktorý na prvý pohľad nesúvisí s hrou *Spoj-a-panuj*, aj keď na riešenie problému sa využijú podobné úvahy.

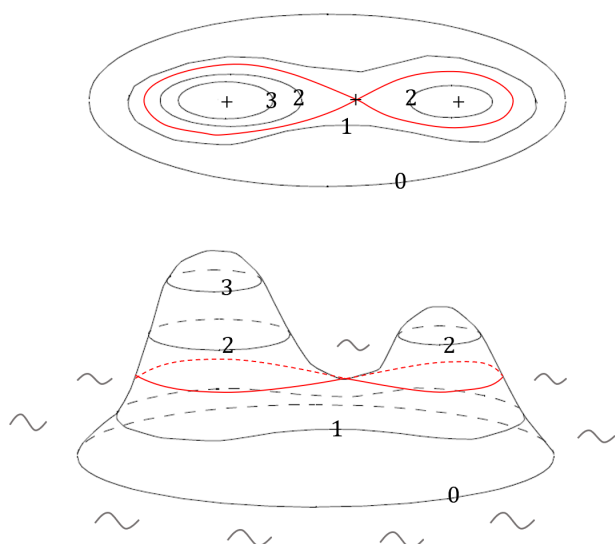
Cieľom tohto zadania je odhaliť matematický vzťah medzi počtom vrcholov, údolí, sedlových bodov, jazier a ostrovov v krajine.

Ľahšie je pracovať s obrysovými obrázkami, t.j. výškovými mapami ako s trojrozmernými obrázkami krajiny.



Obrázok 12. Výšková mapa, náčrt a obrázok krajiny.

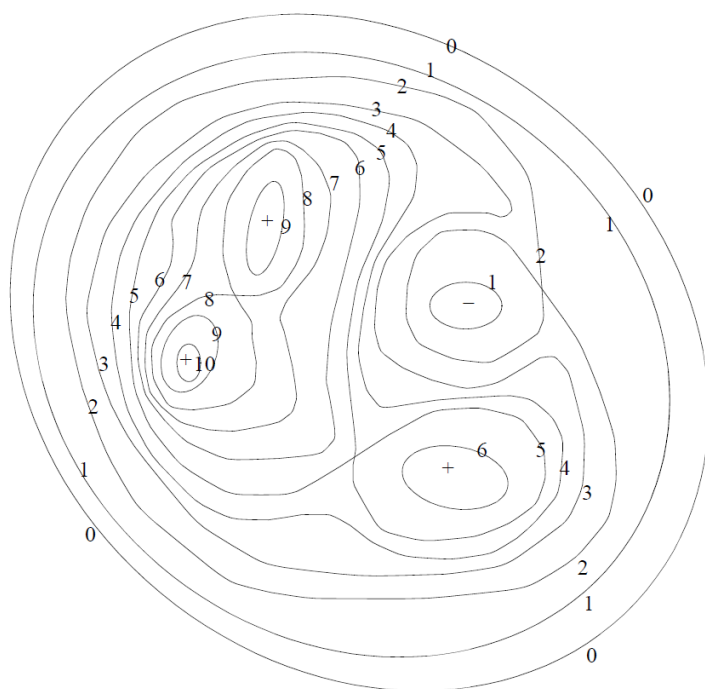
Na výškovej mape sú dva body, označené znamienkom plus: dva vrcholy. Existuje však ďalší bod, ktorý sa nachádza viac-menej v strede medzi dvoma vrcholmi. Tu sa stretávajú štyri čiary v rovnakej výške (červená osmička na Obrázku 13), medzi horami je horské sedlo, sedlový bod.



Obrázok 13. Sedlový bod medzi dvoma horami. V tomto bode sa stretávajú štyri čiary výškovej mapy.

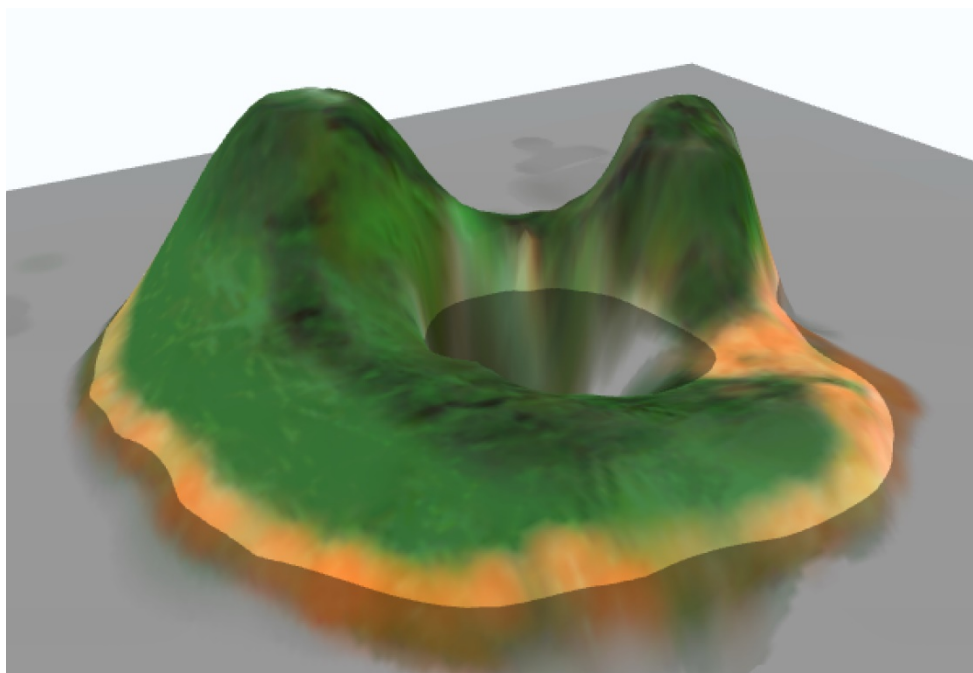
Rovnako ako je to na zemi, aj krajiny, ktoré budeme skúmať v našich úlohách, sú uprostred veľkého oceánu. Skôr ako začneme skúmať, urobíme dve cvičenia týkajúce sa krajiny a výškových máp. Výsledok týchto cvičení nemusíte zakomponovať do správy.

**Úloha 1.** Načrtnite krajinu pre výškovú mapu na Obrázku 14.



Obrázok 14. Výšková mapa. Znamienko mínus označuje dolinu.

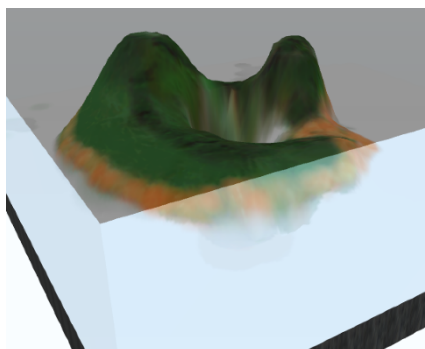
**Úloha 2.** Načrtnite výškovú mapu krajiny na Obrázku 15.



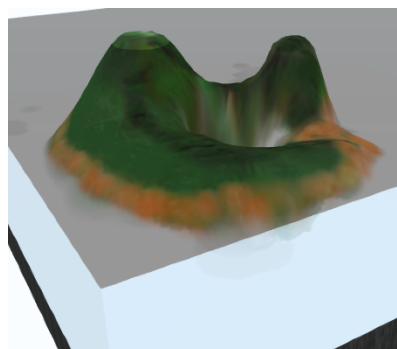
Obrázok 15. Krajina

Budete skúmať spojenie medzi počtom ostrovov  $e$ , počtom jazier  $m$ , počtom vrcholov  $p$ , počtom dolín  $d$  a počtom sedlových bodov  $z$ . Cieľom tejto úlohy je odhaliť vzťah medzi nimi.

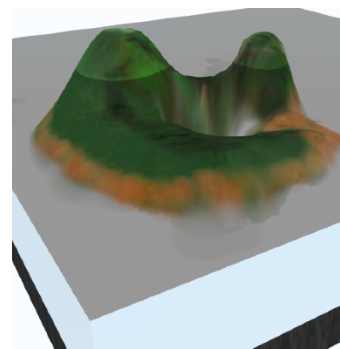
Pri výskume môžete využiť myšlienku invariantu (tak, ako ste sa s invariantom už stretli v základných úlohách). Pri každom ťahu sa vzorec, vzťah nemenil, dostali ste vždy to isté číslo.



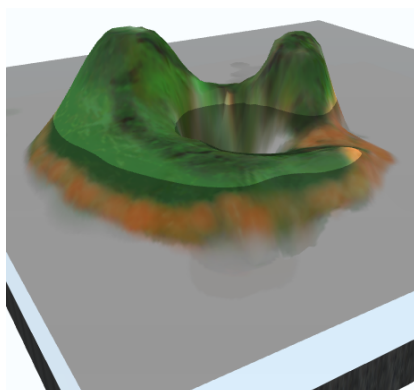
1. Úplne ponorená krajina



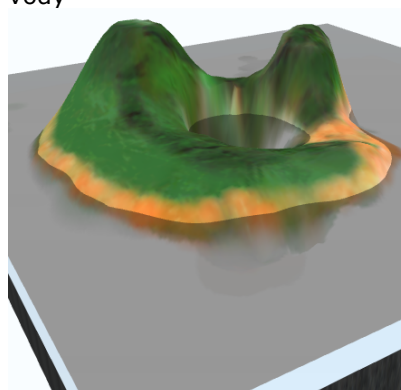
2. Jeden vrchol nad hladinou vody



3. Dva vrcholy nad hladinou vody



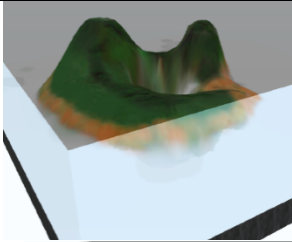
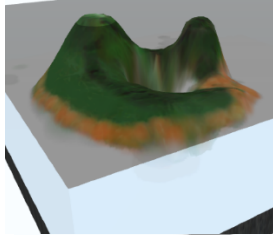
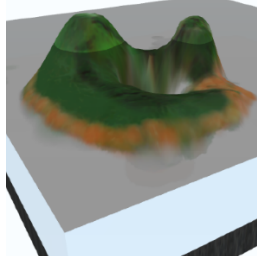
4. Vrcholy prepojené sedlom



5. Celá krajina nad hladinou vody



Teraz nerobíme „ťahy“, ale pomaly znižujeme hladinu vody. Pri každej zmene hladiny vody sledujte, ako sa mení počet ostrovov  $e$ , počet jazier  $m$ , počet vrcholov  $p$ , počet dolín  $d$  a počet sedlových bodov  $z$ , pokiaľ sú tieto prvky krajiny nad vodou.

Situácia v hre	Počet ostrovov $e$	Počet jazier $m$	Počet vrcholov $p$	Počet dolín $d$	Počet sediel $z$
	0	0	0	0	0
	1	0	1	0	0
	...	...	...	...	...

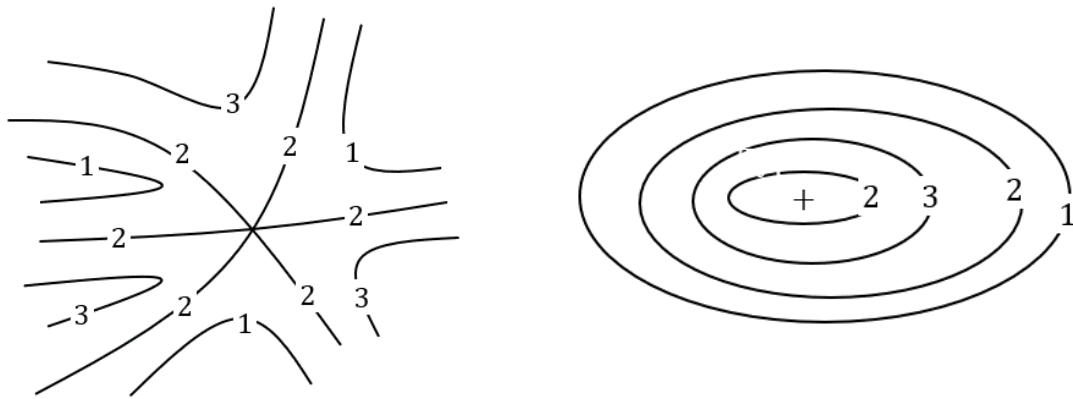
Urobte to pre toľko obrázkov krajiny, koľko potrebujete. Používajte výškové mapy, aby ste si situáciu zjednodušili. Mohli by ste tiež nakresliť niekoľko typov krajiny, ktorých výskyt v reálnom svete je nepravdepodobný, ako, napríklad, presne vodorovný okraj krátera vyhasnutej sopky alebo úplne vodorovná náhorná plošina alebo tri horské hrebene, ktoré sa spájajú v presne rovnakej výške (sedlo typu „opica“, pozri Obrázok 16), ale týmto situáciám by ste sa mali vyhnúť v riešení úlohy 3.

**Úloha 1.** Skúmajte, či existuje vzťah medzi počtom ostrovov  $e$ , počtom jazier  $m$ , počtom vrcholov  $p$ , počtom dolín  $d$  a počtom horských sediel  $z$ , ktorý je rovnaký pre každú krajinu (nad hladinou vody).

**Úloha 2.** Dokážte, že vzťah, ktorý ste našli, je správny. Pomôcka: použite invarianty pre každý typ prechodu typu krajiny, ktorý vznikne pri poklese hladiny vody.

Normálne sedlo je charakterizované dvoma smermi, ktorými sa dá naň dostať z dvoch vrcholov; zo sedla sa pohybujeme smerom nahor, ako po chrbte koňa. Sedlo „opica“ má tretí smer klesania, hovoríme mu chvost opice.

**Úloha 3.** Doplňte vzťah z úlohy 1, tak, aby boli možné aj pre sedlá typu „opica“. Akonáhle sa vám to podarí, urobte to isté pre „viacnásobné“ sedlá: sedlové body, kde sa spájajú viac ako tri horské hrebene v presne rovnakej výške (opica, ktorá má viac ako jeden chvost).



Obrázok 16. Výšková mapa sedla "opica" (vľavo) a presne vodorovného (horizontálneho) okraja krátera sopky (vpravo).