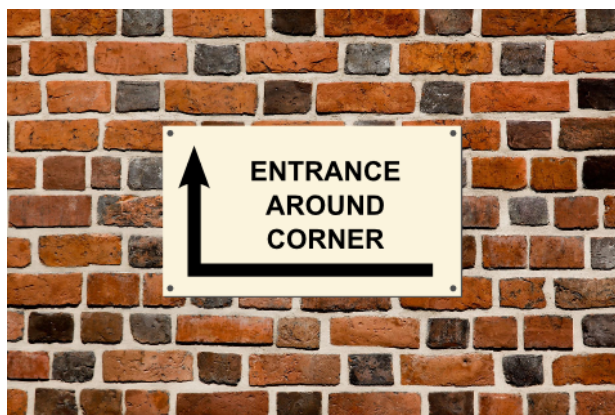


## Matematický B-deň 2015

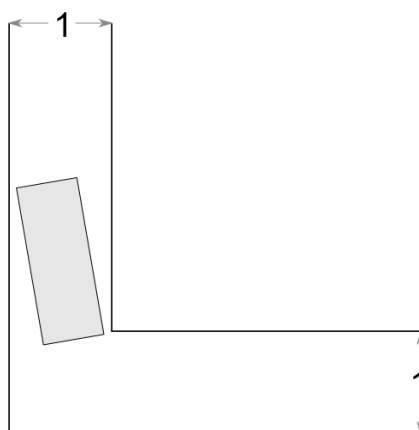
Utorok, 1. december, 9:00 hod. – 16:00 hod.

# Za rohom...



**SAMSUNG**

## Objavovanie 1 – Klavír



Obr. 1

Ťažký klavír (piano) musíme presunúť po chodbe, ktorá sa skladá z dvoch na seba kolmých častí. Chodba je široká jeden meter. Situácia je znázornená na obrázku 1. Klavír je dlhý 1,54m a široký 0,60m. Dá sa klavír s uvedenými rozmermi presunúť po pravouhlej chodbe z jednej strany chodby na druhú stranu? Uvedenú situáciu môžete riešiť výpočtom, obrázkom alebo vhodným experimentom.

## Objavovanie 2 – Gauč alebo diván

Obrázok 1 môže predstavovať aj situáciu, kedy presúvame gauč alebo diván, ktorého pôdorys je tvaru obdĺžnika s dĺžkou 1,36m a šírkou 0,78m. Dá sa takýto gauč presunúť okolo rohu chodby?

### Vysvetlenie

Skúmali ste dve situácie, v ktorých bolo potrebné presunúť objekt (obdĺžnik) okolo rohu pravouhlej chodby. Chodba má danú šírku a je dve časti sú na seba kolmé. Možno ste zistili, že jedna situácia má riešenie a druhá riešenie nemá a možno ste si tiež všimli aj to, že obvod obdĺžnikov, ktoré bolo potrebné presunúť, je rovnaký.

Dnes sa budete zaoberať podobnými situáciami. Bude v nich potrebné presunúť objekt pravouhlou chodbou. Otázka znie, či je možné presunúť objekt s danými rozmermi okolo rohu pravouhlej chodby, ak obe časti chodby sú široké 1 meter. Inými slovami, v dnešnom zadaní budete skúmať pohyb objektu v **dvojrozmernom priestore**; budete skúmať dvojrozmerné geometrické útvary (úsečky, obdĺžniky, kružnice, ...) vzhľadom na možnosť ich presunu po pravouhlej chodbe. Pretože pôjde o úlohy v dvojrozmernom priestore, **výšku objektov zanedbáme**. Šírka chodby bude vždy jedna (jednotky opomenieme). Môžeme teda predpokladať, že objekty so šírkou jedna sa dajú priamymi časťami chodby presunúť bez problémov. Napríklad štvorec so stranou jedna alebo kružnica s priemerom jedna, sa dajú bez problémov presunúť pravouhlou chodbou, teda chodbou, ktorej dve rovnako široké časti sa stretávajú pod pravým uhlom.

## Matematický B-deň – základné informácie

### Štruktúra dňa

Zadanie súťaže matematický B-deň sa skladá z objavovaní a zadaní úloh a z vášho vlastného skúmania. Pokúste sa pracovať s textom zadania tak, aby ste mali k dispozícii najmenej polovicu času, určeného na riešenie (polovicu dňa) na vlastné skúmanie.

### Čo je potrebné odovzdať?

Na záver vášho Matematického B-dňa odovzdáte správu o vašom riešení, jednu za celý tím. Vo svojej správe opíšete výsledky, ku ktorým ste dospeli pri tých riešeniach úloh, ktoré sa v ďalšom texte nazývajú *zadanie* a *vlastné skúmanie*. Riešenia *objavovaní* do správy nemusia byť zahrnuté. Svoju správu napíšte čitateľne a zrozumiteľne. Do správy môžete, samozrejme, vložiť všetky obrázky a ilustrácie, ktoré budete považovať za dôležité. Uvedomte si, že vaša správa musí byť zrozumiteľná pre každého čitateľa, teda aj pre toho, kto nepozná presné zadanie. To znamená, že by ste v správe mali jasne a zrozumiteľne opísať nielen riešenie, ale i stručne predstaviť zadanie a vaše vlastné skúmanie a tiež sa vhodne odvolávať na vaše predchádzajúce riešenie či zistenia.

V skratke: napíšte jasný a zrozumiteľný matematický text, ktorý bude obsahovať matematické argumentovanie. Kvalita textu vašej správy hrá dôležitú úlohu pri hodnotení vášho výkonu a výsledkov riešení!

Možno bude vhodné začať s tvorbou správy bez otáľania. Do textu správy zapisujte zadania i vaše riešenia. Pamätajte, že správa musí byť odovzdaná dnes, do 16:00 hodiny.

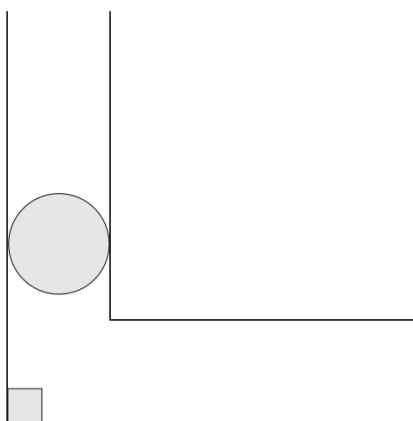
### Informácia online

Podobné úlohy, aké obsahuje dnešné zadanie, je možné nájsť aj online ([https://en.wikipedia.org/wiki/Moving\\_sofa\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_sofa_problem)). V dnešnom zadaní však nájdete rôzne geometrické útvary, ktoré sa od “gauča” budú líšiť.

### Objavovanie 3 – Polkruh

- Aký je maximálny polomer polkruhu, ktorý je možné presunúť pravouhlou chodbou?
- Pokúste sa popísať čo najpresnejšie, ako ste zistili rozmery najväčšieho polkruhu, ktorý je možné presunúť pravouhlou chodbou. Môžete postupovať napríklad takto: najskôr umiestnime polkruh do pozície ..., potom ho presunieme o vzdialenosť ..., potom otočíme o ... stupňov okolo bodu otáčania ..., a podobne.

### Objavovanie 4 – Kružnica



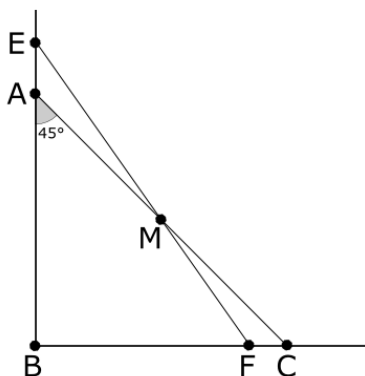
Obr. 2

Kruh s priemerom jedna môže byť pravouhlou chodbou presunutý bez problémov. Predstavme si teraz, že vo vonkajšom rohu chodby je prekážka štvorcového pôdorysu (obrázok 2). Aká je maximálna dĺžka strany štvorca (štvorcovej prekážky), ak platí, že kruh s priemerom jedna je možné presunúť chodbou aj napriek tejto prekážke vo vonkajšom rohu?

#### Intermezzo (Medzihra)

Predtým, ako sa oboznámite s ďalšími úlohami o presúvaní objektu pravouhlou chodbou, vyriešte dve zadania, ktorých riešenia vám budú užitočné pri riešení ďalších úloh.

#### Zadanie 1 – Trojuholníková geometria



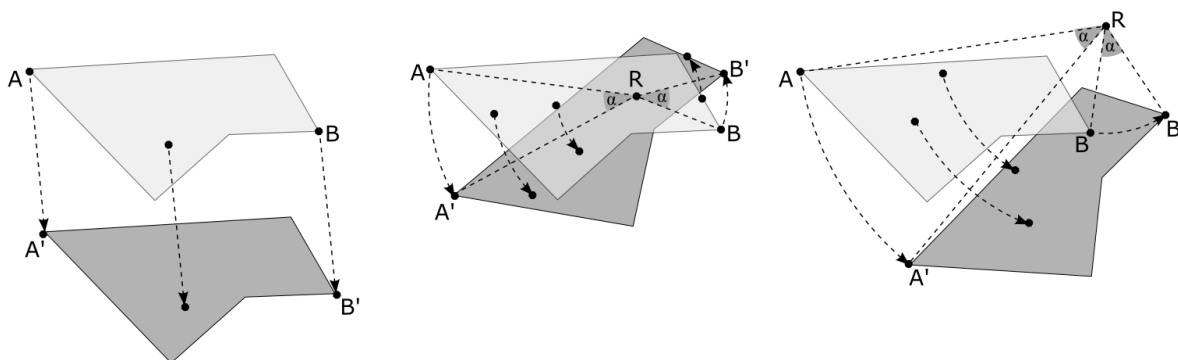
Obr. 3

Daný je rovnoramenný trojuholník  $ABC$ ; bod  $M$  je stred strany  $AC$ . Bod  $F$  leží medzi vrcholmi  $B$  a  $C$  trojuholníka  $ABC$  vo vnútri strany  $BC$ . Priamka  $FM$  pretína priamku, na ktorej leží strana  $AB$  v bode  $E$ . Dokážte, že úsečka  $EF$  je dlhšia ako úsečka (strana trojuholníka)  $AC$ .

*Poznámka: Ak sa vám uvedenú skutočnosť nepodarí dokázať, nevadí, môžete ju smelo používať ako fakt pri ďalších riešeniach; naozaj platí, že úsečka  $EF$  je dlhšia ako úsečka  $AC$ .*

### Zadanie 2 – Pohyby

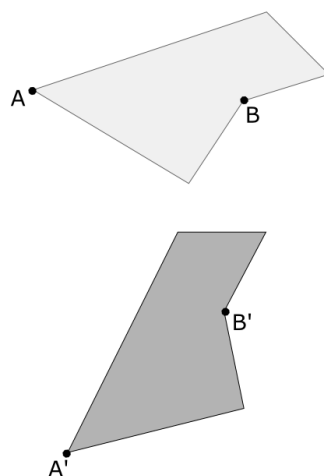
Objekty, geometrické útvary, sa môžu premiestňovať posunutím (bez otáčania) alebo otáčaním okolo bodu, ktorý nazývame stred otáčania. Stred otáčania budeme označovať  $R$ . Na obrázku 4 je znázornené jedno posunutie a dve otáčania. Pre posunutie platí rovnosť veľkostí úsečiek:  $AA' = BB'$  a tiež, že úsečky  $AA'$  a  $BB'$  sú rovnobežné. Pre otočenie platí rovnosť veľkostí úsečiek:  $AR = A'R$ ,  $BR = B'R$  a rovnosť veľkostí uhlov:  $\angle ARA' = \angle BRB'$ .



Obr. 4

Dôležitá poznámka: ak sa nejaký objekt bude pravouhlou chodbou posúvať, musí platiť, že všetky úsečky, pomocou ktorých posúvanie popisujeme, napríklad úsečky  $AA'$  a  $BB'$ , musia ležať vo vnútri chodby; ale ak objekt budeme otáčať, potom **stred otáčania  $R$  nemusí nutne ležať vo vnútri chodby**.

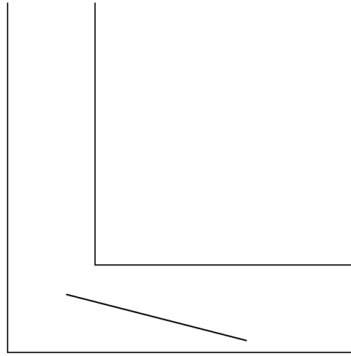
Obrázok 5 zobrazuje posun svetlého objektu do tmavého objektu pomocou otáčania. Nájdite a opíšte stred otáčania  $R$ , na základe ktorého sa svetlý geometrický útvar zobrazí do tmavého geometrického útvaru.



Obr. 5

Vráťme sa späť k objektom presúvaným po pravouhlej chodbe ...

### Zadanie 3 – Palice



Obr. 6

V tomto zadaní sa pozrieme na to, aké sú dĺžky palíc, ktoré môžeme a aké sú dĺžky palíc, ktoré nemôžeme presunúť po pravouhlej chodbe. Palicu bude predstavovať úsečka príslušnej dĺžky.

- Experimentujte pomocou priesvitného papiera alebo kreslením a pokúste sa odhaliť, aká je dĺžka palice, ktorú ešte môžeme pravouhlou chodbou presunúť a aká je dĺžka palice, ktorá sa už pravouhlou chodbou presunúť nedá.
- Pomôžte si riešením v zadaní 1 a vypočítajte dĺžky palíc, ktoré sa určite pravouhlou chodbou nedajú presunúť. Čomu sa dĺžky takých palíc rovnajú? Aká je dĺžka najdlhšej palice, ktorú môžeme pravouhlou chodbou presunúť?
- Dokážte, že najdlhšiu palicu, ktorú ste našli v časti b) tohto zadania, naozaj možno presunúť okolo rohu pravouhlej chodby bez toho, aby sa zasekla.

### Zadanie 4 – Stratégie pre najdlhšiu palicu

Najdlhšiu palicu môžeme presunúť pravouhlou chodbou viacerými spôsobmi.

- V zadaní 2 sme si vysvetlili otáčanie. Najdlhšiu palicu môžeme otočiť okolo rohu otočením so stredom otáčania v bode  $R$ . Kde leží stred otáčania  $R$ , ak platí, že prostredníctvom tohto bodu je možné najdlhšiu palicu presunúť okolo rohu pravouhlej chodby? Vyznačte tiež takú začiatočnú polohu palice, z ktorej je možné začať palicu otáčať.

*Pomôcka: Uvažujte o polohe, pri ktorej oba konce palice ležia na vonkajších stenách chodby a palica sa zároveň dotýka vnútorného rohu chodby. Ak by sme uvažovali, že tento bod je stredom otáčania, potom je možné nájsť kružnicu, ktorú konce palice opíšu.*

- Načrtnite, akú plochu pokryje palica, ktorá sa otáča podľa časti a. tohto zadania.
- Palica sa môže posúvať aj tak, že jej konce sa stále dotýkajú (posúvajú sa pozdĺž) vonkajších stien chodby. Popíšte čo najpresnejšie, ako sa pri takomto pohybe palice pohybuje jej stred.
- Načrtnite, akú plochu pokryje palica, ktorá sa pohybuje podľa časti c. tohto zadania.

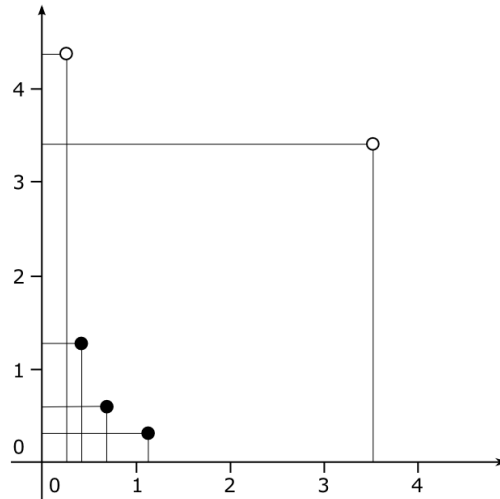
### Zadanie 5 – Najväčší obdĺžnik

V prvých dvoch skúmaníach ste sa už zoznámili s dvoma obdĺžnikmi, ktoré sa posúvajú pravouhlou chodbou. V tomto zadaní budete hľadať obdĺžnik s najväčším obsahom ktorý je možné po pravouhlej chodbe presunúť.

- Aký najväčší obsah môže mať obdĺžnik, ktorý dokážeme presunúť po pravouhlej chodbe, ak šírka tohto obdĺžnika nie je menšia ako 0,5?
- Nájdite rozmery obdĺžnika a najväčším obsahom, ktorý môžeme presunúť po pravouhlej chodbe aj otočením aj posunutím. Dĺžka kratšej strany obdĺžnika nie je ohraničená rozmerom 0,5.
- Ukážte, že obdĺžnik, ktorý ste našli v časti b. tohto zadania, je možné presunúť pravouhlou chodbou a v rohu chodby sa nezasekne.

### Zadanie 6 – Všetky obdĺžniky

Najväčší obdĺžnik, ktorý je možné presunúť po pravouhlej chodbe, ste už našli. Ale čo ostatné obdĺžniky? Na obrázku 6 je znázornený súradnicový systém a päť obdĺžnikov. Každý obdĺžnik na obrázku 7 je v súradnicovom systéme umiestnený tak, že jeho jedna strana leží na osi  $x$  a druhá strana leží na osi  $y$ . Ak je možné obdĺžnik po pravouhlej chodbe presunúť, jeho pravý horný roh je na obrázku 7 znázornený plným krúžkom. Ak obdĺžnik po pravouhlej chodbe nie je možné presunúť, jeho pravý horný roh je na obrázku 7 znázornený prázdny krúžkom.

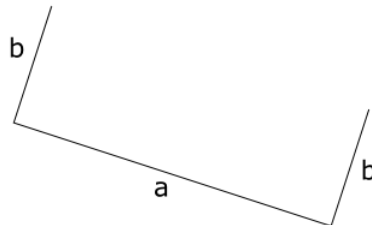


Obr. 7

- Kde leží hranica medzi plnými a prázdny krúžkami?
- Ktorými rovnicami môžeme hranicu medzi plnými a prázdny krúžkami opísať?

### Zadanie 7 – Objekt tvaru U

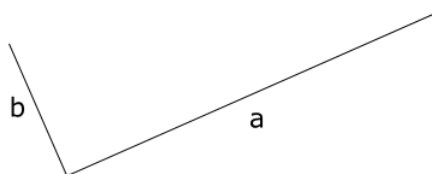
Ak k obom koncom najdlhšej palice pridáme dve kolmé úsečky rovnakej dĺžky, dostaneme objekt tvaru U. Určte maximálny obvod útvaru U (obvod útvaru predstavuje súčet  $a + 2b$ ; obrázok 8), ktorý môže byť presunutý po pravouhlej chodbe.



Obr. 8

### Zadanie 8 – Objekt tvaru L

Uvažujme o palici, ktorá je zalomená do pravého uhla (objekt tvaru L). Aká je maximálna dĺžka objektu tvaru L (dĺžka  $a+b$ ; obrázok 9), ktorý môže byť presunutý po pravouhlej chodbe?



Obr. 9

## Vaše vlastné skúmanie

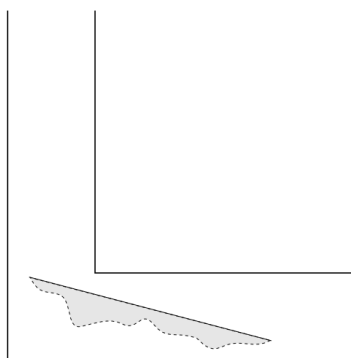
V zadaniach, ktoré ste doteraz riešili, ste sa naučili veľa o objektoch (útvoroch), ktoré môžeme a ktoré nemôžeme presúvať po pravouhlej chodbe so šírkou jedna. Postrehli ste, že problém, aký najväčší objekt dokážeme po pravouhlej chodbe presunúť, **nie je ešte v skutočnosti vyriešený?**

V tejto časti budete ďalej skúmať objekty, ktoré môžu byť presúvané pravouhlou chodbou. Môžete si vybrať, čo bude predmetom vášho skúmania. Môžete si vybrať objekty, geometrické útvary, ktorými sa predchádzajúce zadania nezaoberali. Otázky, ktoré môžete riešiť sa môžu týkať:

- maximálneho obvodu alebo maximálneho obsahu útvaru,
- rôznych stratégií posúvania objektu pravouhlou chodbou,
- plochou, ktorú objekt presúvaním pokryje.

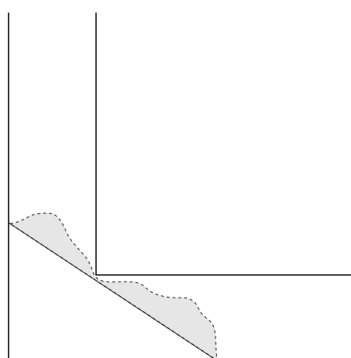
Môžete tiež pokračovať v doterajšom skúmaní. Ponúkame niekoľko návrhov, z ktorých si môžete vybrať, alebo sa tiež môžete nižšie uvedenými možnosťami inšpirovať.

- Predstavte si, že pravouhlou chodbou presúvate najdlhšiu palicu, podľa zadania 4a. K palici môžete pridať veľkú plochu smerom k vonkajším stenám (hraniciam) chodby (obrázok 10). Možno ešte viac plochy sa dá pridať, ak dĺžka palice nie je maximálna! Skúmajte ...



Obr. 10

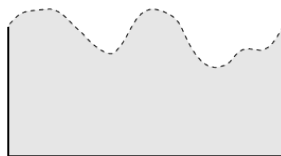
- Predpokladajme, že palica leží tak, že sa jej konce dotýkajú vonkajších stien chodby, ako to bolo v zadaní 4c. K palici môžeme pridať veľkú plochu smerom k vnútorným stenám chodby (obrázok 11). Plocha môže byť ešte väčšia, ak dĺžka palice nie je maximálna! Skúmajte.



Obr. 11



- Predstavte si objekt tvaru U, ako v zadaní 7. Dovnútra objektu tvaru U vložíme nejakú plochu (obrázok 12). Posúvajte teraz objekt tvaru U po pravouhlej chodbe tak, že jeho dlhšia (zadná) časť sa pohybuje pozdĺž vonkajších stien chodby. Koľko plochy je možné pridať dovnútra objektu tvaru U? Môžete začať skúmanie s podmienkou, že dlhá strana objektu je kratšia ako dvojnásobok šírky chodby. Dokážete tiež nájsť, experimentovaním, maximálny tvar, ak dlhá strana objektu tvaru U je dlhšia ako dvojnásobok šírky chodby?



Obr. 12

- Nájdite dvojrozmerný objekt, ktorý môže byť presunutý okolo rohu jediným otočením (podobne ako v zadaní 4a).