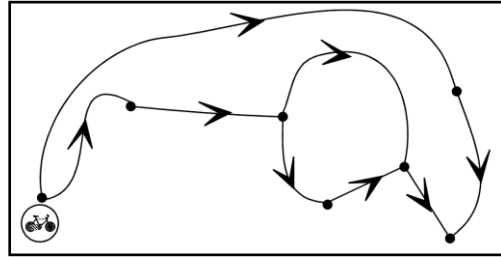


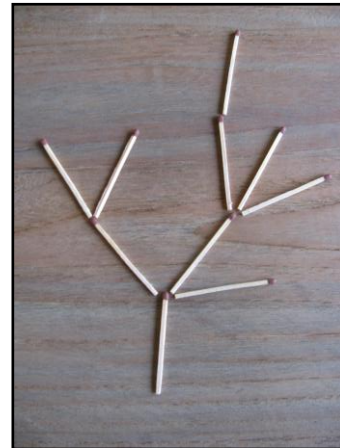


MATEMATICKÝ B-DAY 2011

NITRA, piatok, 25. november, 9:00-17:00 hod.



Posledný ťah



Úvod

Zadania úloh dnešného dňa, ktorý má názov: Matematický B-deň, tvoria hry pre dvoch hráčov. Sú to hry, v ktorých sa náhoda, ako napríklad v hrách spojených s hodom kockou, vôbec nevyskytuje. Pravidlá každej hry sú podrobne vysvetlené; v každej situácii hry je jasne stanovené, aké sú možnosti ťahu hráča. Hráči sa v jednotlivých ťahoch striedajú a hráč nemôže svoj ťah vynechať. Prehráva ten hráč, ktorý je na ťahu, ale ťah sa nedá uskutočniť. Každý hráč však chce vyhrať. Preto v úlohách budete hľadať spôsob, postup, ako, pri dodržaní stanovených pravidiel hry, vyhrať. Budete tiež analyzovať postup takých ťahov, ktoré umožnia hráčovi vyhrať. Takýto postup sa volá „výherná stratégia“.

Štruktúra zadania

Prvá časť

Predstavíme si štyri hry. Ich cieľom je, aby ste získali poznatky a zručnosti v tom, ako hľadať výhernú stratégiu. Ak ste vo vašej skupine štyria, môžete si každú hru zahrať niekoľkokrát vo dvojiciach. Po každej hre si porovnajete svoje postupy, stratégie a porozprávajte sa o výsledku. Zadania úloh, opis hier, je v **prvej časti** textu označný bodkou (•). Pomôže vám to orientovať sa v texte. Riešenia úloh, teda výherné stratégie hier z prvej časti, napíšete do záverečného riešenia.

Druhá časť

V druhej časti nájdete niekoľko teoretických poznatkov o rôznych hrách. Pokúste sa aplikovať teoretické poznatky na hry, s ktorými ste sa oboznámili v **prvej časti**. Metóda riešenia úloh, popísaná v druhej časti, sa nazýva **Cesta naspäť** (anglicky: Back-tracking). Postup spätnej rekonštrukcie ťahov smerom od záverečnej situácie k východiskovej situácii, býva pri hľadaní výhernej stratégie veľmi užitočný. To, čo v tejto časti o výherných stratégiách odhalíte, popíšete vo vašom záverečnom riešení.

Tretia časť

V tejto časti budete detailne analyzovať jednu hru. Pri analýze stratégií použijete špeciálne pripravený súbor v Exceli. Tento súbor vykoná za vás veľa užitočných, ale nudných výpočtov. Výsledky výpočtov získané v Exceli vám pomôžu pri hľadaní riešenia, ktoré tiež opíšete do vášho záverečného riešenia.

Záverečné zadanie

Na záver si budete musieť vybrať medzi hlbšou analýzou niektorej hry z tretej časti alebo analýzou náročnejšieho zadania jednej z hier z prvej a druhej časti. Otázky, na ktoré budete hľadať odpovede, sú znovu označené bodkou (•). Otázky a odpovede, ktorými budete na ne odpovedať, tvoria podstatu vášho výskumu.

Výstup

Výstupom vašej činnosti je záverečné riešenie, ktoré tvorí popis riešenia, ktoré ste získali ako odpovede na položené otázky. Popis musí byť zrozumiteľný pre čitateľa, ktorý nepozná zadania. To znamená, že znenie úloh či problémov a vaše riešenia musia byť popísané dostatočne detailne a čitateľne. Prirodzene, že vo vašom popise môžete využiť (citovať) text jednotlivých zadaní. Bude ale vhodnejšie, ak popis riešenia, ktorý odovzdáte, bude opisovať vaše úvahy, vrátane zdôvodnení, pri ktorých využijete formulácie vašich úvah zo všetkých častí pôvodného zadania.

Dokument, ktorý odovzdate, by sa mal dať dobre kopírovať. Ak bude obsahovať časti písané rukou, použijete na písanie pero s čiernou náplňou.

Ako by mal byť rozdelený čas medzi 9:00 a 17:00

9 - 10 h	Prvá časť: Zahrajte si hry a snažte sa hrať čo najlepšie.
10 - 11 h	Druhá časť: Dôkladne sa oboznámte s stratégiou “Cesta naspäť” a s tým, ako ju najvýstižnejšie popísať.
11 – 12:30 h	Tretia časť: Skúmajte s Excelom.
12:30 – 13:30 h	Spoločný obed.
13:30 – 17:00 h	Riešte záverečné zadanie a píšete výstup vašej práce – popis riešenia.

Rada: *Nezabudnite na prestávky na občerstvenie a dodržiavajte pitný režim.*

Dobrá zábavu a veľa šťastia!

Prvá časť: Štyri hry pre dvoch hráčov

Predstavíme štyri hry pre dvoch hráčov. Zahrajte si tieto hry a pokúste sa odhaliť výherné stratégie.

Hra 1: Hra (1,2,3)

Pomôcky: *Zápalky alebo podobné predmety.*

Príprava hry: *Na stole leží na kôpke určitý, vopred daný, počet zápaliek, napríklad 17.*

Pravidlá hry: *Ťah spočíva v odobratí 1, 2 alebo 3 zápaliek z kôpky na stole.*

Hráči sa v ťahoch striedajú.

Hráči sa striedajú aj v tom, kto je prvý na ťahu v novej hre.

Výhra/prehra: *Prehráva hráč, ktorý nemôže uskutočniť svoj ťah.*

V každom ťahu je z kôpky odobratá najmenej jedna zápalka. Na konci hry jeden z hráčov prehráva; po každom ťahu je na kôpke menej zápaliek, takže nastane moment, keď sa nebude dať z kôpky odobrať žiadna zápalka.

- Zahrajte si hru niekoľkokrát. Začnite aj s iným, nižším počtom zápaliek, na začiatku hry. Hrajte dovtedy, kým neodhalíte takú postupnosť ťahov, ktorá vás privedie k výhre a zistíte, ako je potrebné ťahať, aby bola výhra zaručená za každých okolností. Uvažujte nad tým, koľko zápaliek by malo byť na začiatku hry v kôpke, aby prvý hráč hru nikdy nevyhral, nech hrá akokoľvek dobre. Predpokladáme, že druhý hráč nerobí chyby, hrá optimálne.

Cieľom hry a úloh k nej patriacich je odhaliť, aký má byť počet zápaliek na začiatku hry, aby, bez ohľadu na to, ako dobre hrá druhý hráč, prvý hráč vždy vyhral. Na druhej strane je potrebné zistiť, či existuje taký počet zápaliek na začiatku hry, pri ktorom vždy vyhrá druhý hráč.

Spôsob, ktorý opisuje ako sa hra hrá, teda postupnosť jednotlivých ťahov obidvoch hráčov, z ktorých vždy jeden vyhrá, sa nazýva **STRATÉGIA**.

Variant hry 1: Hra (3, 4)

- Premyslite si výhernú stratégiu, ak sa v hre budú odoberať v každom ťahu 3 alebo 4 zápalky a na začiatku bude na kôpke 65 zápaliek.

Hra 2: Obmedzený pohyb kráľa na šachovnici

Pomôcky: *Šachovnica alebo (lepšie) štvorcovaný papier a šachová figúrka, kráľ. Namiesto kráľa môžete použiť mincu, gombík alebo iný vhodný predmet.*

Príprava hry: *Položte kráľa na ľubovoľný štvorček. To je začiatok hry.*

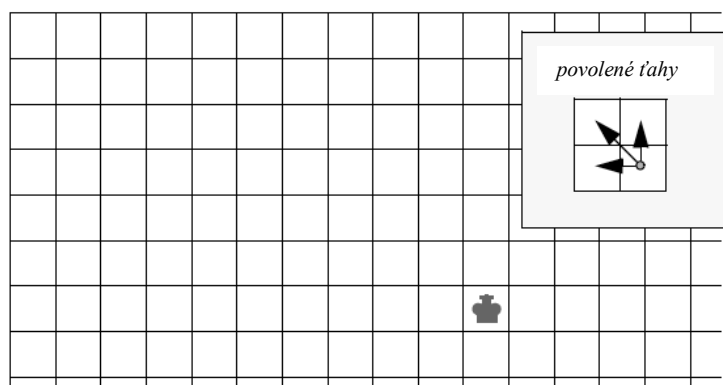
Pravidlá hry: *Ťah kráľom môže byť iba o jeden štvorček hore, vľavo alebo vľavo hore po diagonále.*

Hráči, sediaci na tej istej strane šachovnice resp. štvorcového papiera, sa v ťahoch kráľom striedajú.

Hráči sa striedajú aj v tom, kto je prvý na ťahu v novej hre.

Výhra/prehra: *Prehráva hráč, ktorý nemôže uskutočniť svoj ťah.*

Ťah kráľom je obmedzený. Nemôže sa pohybovať ani smerom doprava ani smerom dolu. Nakoniec dosiahne pozíciu v ľavom hornom rohu šachovnice a nebude možné uskutočniť žiaden ďalší ťah.

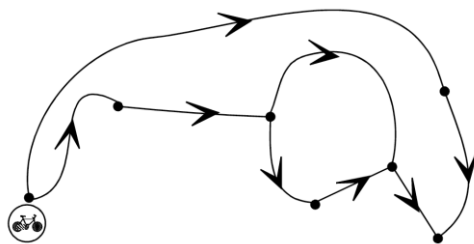


Pokúste sa presne určiť, ktoré východzie pozície na šachovnici umožnia vyhrať hráčovi, ktorý je prvý na ťahu bez ohľadu na to, ako dobre hrá druhý hráč. Naopak, ktoré východzie pozície zaručia víťazstvo druhému hráčovi bez ohľadu na to, ako dobre hrá prvý hráč.

- Pokúste sa nájsť pozície, ktoré vedú vždy k výhre a pozície, ktoré vedú vždy k prehre.

Hra 3. Jednosmerná hra s bicyklom

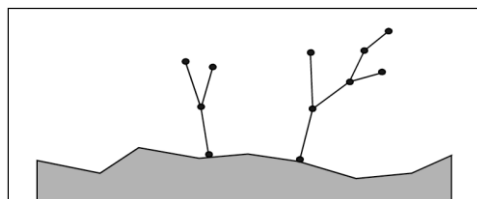
V tejto hre hráči posúvajú po dráhe bicykel z jedného miesta na druhé. Bicykel štartuje z vyznačeného štartovacieho miesta a pohybuje sa po šípkach z bodu do bodu. Pozor! Cesty vyznačené šípkami sú iba jednosmerné! Prehráva ten hráč, ktorý nemôže ísť ďalej.



- Môže hru vyhrať hráč, ktorý je na ťahu prvý?

Hra 4. Prerezávanie stromov

Táto hra sa týka prerezávania stromov. Strom tvoria vetvičky a uzly. Vetvička začína a končí uzlom. V niektorých uzloch sa vetvičky rozkonárujú. Na obrázku vpravo je príklad záhrady s dvoma stromami. Vidíte jednu vetvu (kmeň stromu), ktorou prúdia živiny zo zeme k uzlu, v ktorom sa strom rozkonáruje. Ťah sa skladá z rezania (prerezania) vetvičky priamo nad uzlom, kde vetvička začína. Môžete odrezať aj kmeň stromu priamo nad zemou. Alebo stromu napravo je možné odrezať celú pravú časť nad druhým uzlom nad zemou.



Pomôcky:

Ceruzka a papier

Príprava hry:

Nakreslite si záhradu s niekoľkými stromami.

Pravidlá hry:

Ťahom je prerezanie vetvičky spolu so všetkým, čo je k vetvičke pripojené.

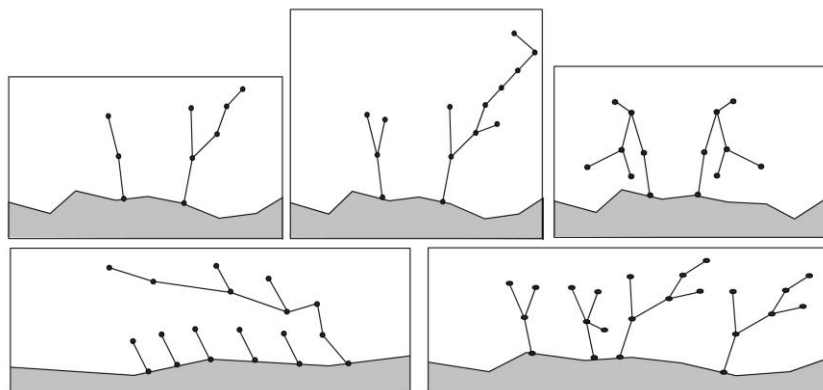
Hráči sa v ťahoch kráľom striedajú.

Hráči sa striedajú aj v tom, kto je prvý na ťahu v novej hre.

Výhra/prehra:

Prehráva hráč, ktorý nemôže uskutočniť svoj ťah.

- Na obrázkoch je päť záhrad. Zahrajte si vo dvojiciach hru o prerezávaní stromov, ktoré rastú v týchto piatich záhradách.



V piatej záhrade (záhrada v druhom riadku vpravo) musíte byť veľmi vynaliezaví! V prvom ťahu odrežte vetvičku, ktorá vychádza z druhého uzla od zeme na druhom strome zľava.

Môžete si byť istí, že týmto prvým ťahom vyhráte celú hru!

- Prečo si môžete byť tým istí? Akú stratégiu použijete?
- Veľmi náročné! (*túto úlohu môžete vynechať*): každým iným prvým ťahom vyhrá váš súper. Platí to vždy?

Druhá časť: Nestranné hry; teória

A Výhra stratégiou “cesta späť” s 0 a 1

Budeme sa zaoberať stratégiami, ktoré ste pravdepodobne použili pri hraní hier v prvej časti. Uvedieme najskôr niekoľko teoretických poznámok.

Pozrime sa bližšie na hru (1, 2, 3).

Pravdepodobne ste odhalili víťaznú stratégiu pre hru (1, 2, 3). Ak nie, odhalíte ju teraz! Po každom ťahu prvého hráča, zostáva na kôpke taký počet zápaličiek, ktorý je deliteľný číslom štyri. V prvom ťahu, ak hra začína s počtom zápaličiek 17, odoberie prvý hráč jednu zápalku; zostane 16 zápaličiek. Je zrejmé, že druhý hráč nemôže odobrať taký počet zápaličiek, že po jeho ťahu znova zostane na kôpke počet zápaličiek deliteľný štyrmi. Ale prvý hráč svojim ťahom znovu upraví počet zápaličiek na kôpke tak, aby bol deliteľný štyrmi. Čiže ak druhý hráč odoberie 3 alebo 2 alebo 1 zápalku, prvý hráč odpovedá ťahom: 1, 2 alebo 3 zápalky. Počet zápaličiek na kôpke po každom ťahu prvého hráča je 16, 12, 8, 4 a 0.

1. Hráme hru (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), a na kôpke je 1 000 zápaličiek.
 - a. Aký ťah **musí** urobiť prvý hráč, aby si bol istý svojim víťazstvom?
 - b. Po koľkých ťahoch sa hra skončí, ak prvý hráč hrá správne, čiže dodržiava výhernú stratégiu?
 - c. Môže prvý hráč vyhrať, ak počiatočný počet zápaličiek je 374?
Predpokláame, že obaja hráči dodržiavajú optimálnu stratégiu.

Cesta naspäť: Prehrajme si hru 1 od konca

Ako je možné odhaliť víťaznú stratégiu prvej hry, ktorá spočíva v násobkoch čísla štyri? Nepochybne môžeme uvažovať nasledovne. Na záver hry je na stole 0 zápaličiek. Hráč, ktorý je v tomto momente na ťahu, prehráva. Ak chcem vyhrať, musia pred mojim posledným ťahom zostať na stole jedna, dve alebo tri zápalky. To znamená, že hráč, ktorý je na ťahu keď sú na stole štyri zápalky, prehráva, pretože po jeho ťahu zostane na stole jedna, dve alebo tri zápalky. Ak je na stole pred mojim ťahom 5, 6 alebo 7 zápaličiek, vyhrám! Pretože nechám súperovi po mojom ťahu na stole štyri zápalky. To znamená, že hráč, ktorý je na ťahu, keď je na stole osem zápaličiek ... a tak ďalej.

O tom ako sa hra vyvíjala podľa jednotlivých ťahov sme premýšľali spätne.

Táto stratégia sa nazýva CESTA NASPÄŤ. Pomocou stratégie *cesta naspäť* sa dajú veľmi vhodne analyzovať hry z prvej časti zadania, ale aj nachádzať stratégie iných hier.

Pozícia víťaza a porazeného

V teórii hier, ktorými sa zaoberáme, môžeme popísať herné pozície. Sú to situácie v ktorých sa hra počas hrania nachádza. V hre (1, 2, 3) je pozíciou počet zápaličiek, ktoré zostávajú na stole.

V druhej hre (Jednosmerná hra) je to miesto, na ktorom sa nachádza bicykel.

Ak sa počet zápaličiek na stole rovná 0, 4, 8, 12, atď. v hre (1, 2, 3) hovoríme o *pozíciách porazeného*. Ak je hráč na ťahu v pozícií porazeného, môže vyhrať iba vtedy, ak súper urobí chybu. Pozície 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, atď. v hre (1, 2, 3) sú *pozície víťaza*. Ak je hráč na ťahu v týchto pozíciách hry a neurobí chybu, jeho súper nemá žiadnu šancu vyhrať.

Všeobecná definícia pozície víťaza a pozície porazeného v hrách, ktoré končia vtedy, ak hráč, ktorý je na ťahu, už nemôže uskutočniť svoj ťah:

- *Pozícia víťaza*: existuje aspoň jeden ťah, ktorým sa z tejto pozície dostane hra do pozície porazeného.
- *Pozícia porazeného*: všetky ťahy z tejto pozície vedú k pozíciám víťaza.

Uvedomte si, že niekedy je možné dostať hru z pozície víťaza do pozície víťaza, ale hra sa vždy aspoň raz dostane do pozície porazeného. Ak svojim ťahom hru dostanete do pozície víťaza, museli ste urobiť veľkú chybu. Hra sa vám vymkla spod kontroly a svojou chybou ste umožnili víťazstvo súperovi.

Kódovanie pozícií pomocou 0 a 1.

Ak hru hráme na hracom pláne (Jednosmerná hra; šachovnica) môžeme do plánu vyznačiť pozície pomocou písmen **V** (víťaz) alebo **P** (porazený). V literatúre z teórie hier sa často pozície označujú **1** (pozície víťaza) alebo **0** (pozície porazeného).

Ukážme si, ako príklad, ktoré miesta označiť 1 a ktoré 0 v Jednosmernej hre s bicyklom.

Postupujeme nasledovne:

- Ak šípka vedie z nejakej pozície do pozície 0, potom pôvodnú pozíciu označíme 1. Ak uvažujem ako víťaz, môj súper bude musieť byť na ťahu, keď je hra v pozícií porazeného.
- Ak z nejakej pozície vedú všetky šípky do pozície 1, potom bude táto pozícia označená 0, pretože nie je možné, aby sa váš súper dostal z pozície víťaza do pozície porazeného.

2. Pozrite sa na obrázok vpravo a overte, či ste pochopili označovanie pozícií nulami a jednotkami a či dokážete používať takéto označovanie pozícií v hre. Overte otázky v bodoch a, b, c.

a. Skontrolujte, či sú nuly a jednotky v obrázku zapísané správne.

Na pozícii, ktorá je označená otáznikom (?) bude 1, pretože váš súper po vašom ťahu ťahá na pozíciu porazeného. Vy môžete pokračovať aj na pozíciu 1, ale to by nebolo veľmi rozumné...

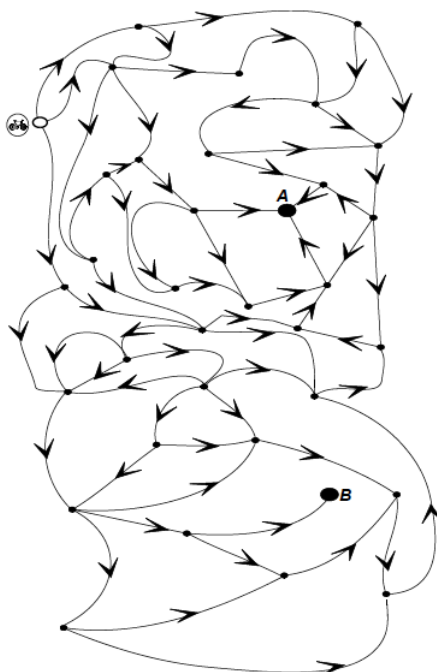
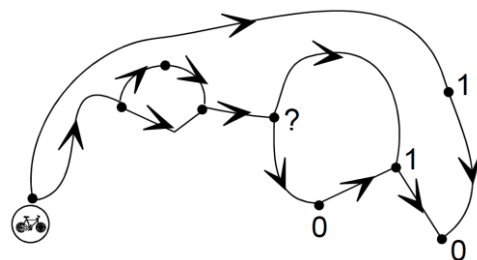
b. Pozícia, ktorá vedie k pozícií označenej otáznikom bude mať hodnotu 0. Pretože ak je to vaša pozícia

c. Ak každý hráč bude používať správnu stratégiu v tejto hre, kto vyhrá? Prvý alebo druhý hráč?

3. Na nasledujúcom obrázku je komplikovanejšia jednosmerná hra. Hra môže skončiť v bode A alebo v bode B. To sú body, ktoré víťaz označuje symbolom 0. Použite označenie pomocou 0 a 1 v tomto pláne hry. Zväčšený plán hry nájdete v priloženom pracovnom liste.

a. Môže hru vyhrať prvý hráč?

b. Ten hráč, ktorý prehrá, by mal byť v poslednom ťahu v pozícií A alebo B. Môže hráč, ktorý prehrá, ovplyvniť hru tak, aby skončil v pozícií B?

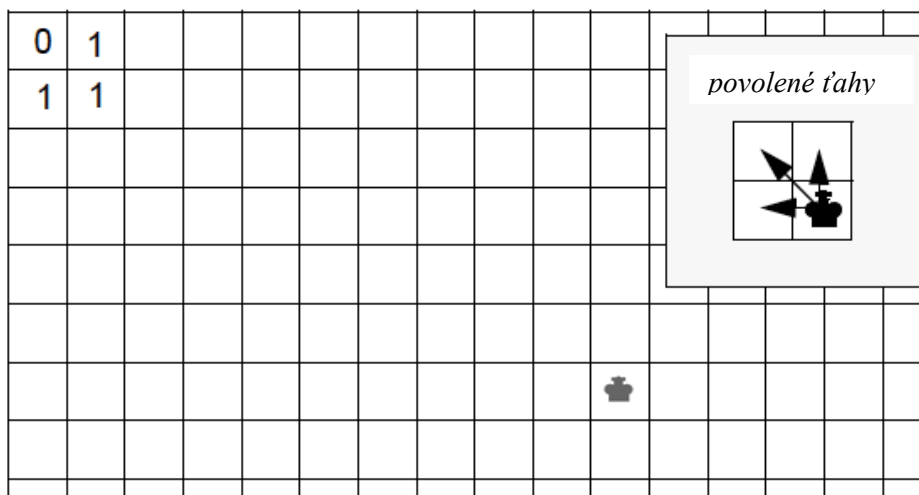


B Trochu viac o nule a jednotke: ďalšie hry

“Obmedzený pohyb kráľa” je tiež hra, ktorú môžeme popísať šípkami!

Vezmime si stred každého štvorca na šachovnici alebo na štvročekovanom papieri. Z tohto stredu nakreslíme šípky smerom do stredov tých susedných štvorcov, ktoré sú pravidlami hry povolené na ťah. Z každého štvorca vedú práve tri šípky, ako je naznačené na obrázku. Šípky v celom hernom pláne by boli neprehľadné. Užitočnejšie bude, ak budeme do jednotlivých štvorčekov vpisovať nuly a jednotky. Aby sme sa v hernom pláne ľahšie orientovali, očísľujeme jednotlivé štvorce (polia herného plánu). Štvorcu vľavo hore bude priradené očíslovanie (0, 0). Štvorec v šiestom stĺpci zľava a v treťom riadku zhora bude mať číslo (2, 5).

4. Do časti hracieho poľa na obrázku nižšie sme už vpísali nulu a jednotky. Štvorec (0, 0) je štvorec, v ktorom hra končí, z neho neexistuje už žiaden ťah, preto je označený nulou. Štvorce (0, 1), (1, 0) a (1, 1) sú označené jednotkami, pretože ťah z každého z nich vedie do štvorca (0, 0), teda priamo k víťazstvu. Tieto štvorce sú pozíciami víťaza! Zo štvorca (0, 2) je, podľa pravidiel hry, možný iba jeden ťah, doľava, teda iba do štvorca (0, 1), ktorý je už označený jednotkou.



- Prečo musíme štvorec (0, 2) označiť nulou?
- Pokračujme štvorom (1, 2). Prečo musí byť označený jednotkou?
- Pokračujte ďalej až kým neodhalíte vzorec, pravidlo, ktoré platí na celom hracom pláne. Pokúste sa toto pravidlo (vzorec) vysvetliť.

Toľko príprava, poďme hrať! Položte kráľa na štvorec (6, 10).

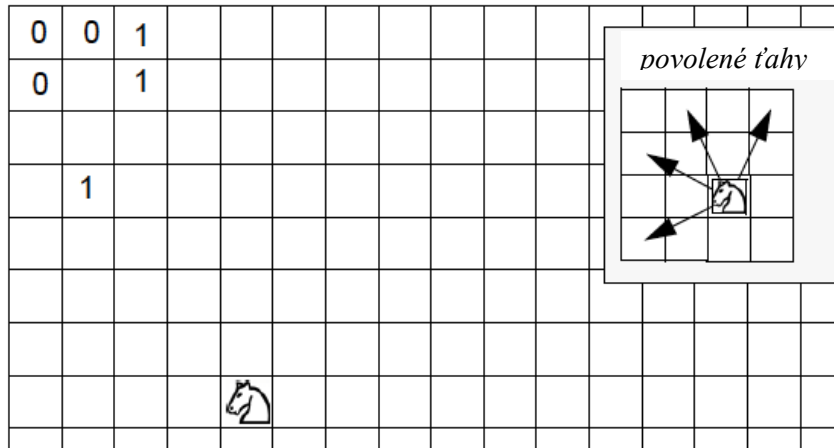
- Môže prvý hráč vyhrať z tejto pozície? Ak áno, aký bude jeho prvý ťah?
- Teraz položte kráľa na štvorec (1020, 389785).
Môže prvý hráč vyhrať z tejto pozície? Ak áno, aký je jeho prvý ťah?

Hra s obmedzeným pohybom jazdca.

Táto hra pripomína hru s kráľom. Povolené ťahy jazdcom sú však iné. Ťahy jazdcom sú štyri a nájdete ich na obrázku na strane 7.

- 5 Do hracieho poľa sú už vpísané nuly a jednotky.

- Pokračujte vo vypĺňaní hracieho poľa a zistite, či vyhrá prvý hráč, ak je jazdec položený na označený štvorec a ak predpokladáme, že prvý hráč hrá hru dobre.
- Nájdite štvorce, ktoré sú pozíciami porazeného a označte ich v jazyku jednotiek a núl.

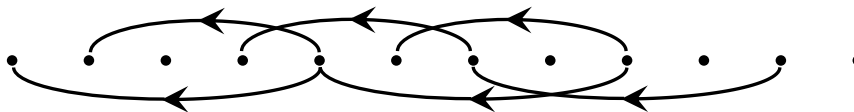


Hra (3, 4) je tiež jednosmerná hra

Opíšeme hru ktorá je inou verziou prvej hry. Nazveme ju hra (3, 4) a ukážeme, že je to tiež jednosmerná hra.

Posledná bodka vľavo na nasledujúcom obrázku predstavuje koniec hry, posledné pole hracieho plánu a mala by byť označená nulou.

Hrací plán tvorí spolu 66 bodiek, ale nepotrebujeme ich mať všetky nakreslené. Použili sme stratégiu "cesta späť" a vidíme posledné ťahy tejto hry. Niektoré ťahy, ktoré je možné vykonať z jednotlivých pozícií, sú zakreslené a označené šípkami.



- 6 a. Vieme, že v jednom ťahu môžeme odobrať iba tri alebo štyri zápalky. Niektoré ťahy, ktoré je možné uskutočniť, sú zakreslené pomocou šípok, Doplňte ďalšie možné ťahy.

Pozíciu víťaza označujeme jednotkou, pozíciu porazeného nulou.

V tabuľke je opísaný začiatok "cesty späť" tejto hry. Začíname z pozície porazeného, označenej symbolom 0, počet zápaliek je tiež nula, čiže porazený, ktorý je v tejto pozícií na ťahu, nemôže svoj ťah uskutočniť.

Počet zápaliek	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Hodnota (0 alebo 1)	0	0	0	1	1	

b. V predchádzajúcej tabuľke sú v druhom riadku zapísané jednotky a nuly. Skontrolujte, či sú zapísané správne. Doplňte tabuľku, postupujte zľava doprava.

c. Opakuje sa postupnosť núl a jednotiek v druhom riadku tabuľky podľa nejakého pravidla? Ak áno, popíšte pravidlo, ktoré ste odhalili.

d. Hra začína s počtom zápaliek 65. Ťah spočíva v odobratí troch alebo štyroch zápaliek (je to hra (3, 4)). Vyhrá túto hru prvý hráč, ak obaja hráči hrajú hru dobre (nepomýlia sa vo svojom ťahu)?

Diagram, ktorý sa skladá z bodiek (vrcholov) a čiar (hrán) nazývame **graf**. Graf nazývame **orientovaný graf**, ak všetky hrany, ktoré spájajú jednotlivé vrcholy, majú vyznačenú orientáciu pomocou šípok. V orientovaných grafoch, s ktorými sme sa doteraz zaoberali (jednosmerná cesta), nebolo možné nikdy sa vrátiť do vrchola, ktorým sme už raz prešli. Existujú orientované grafy, v ktorých je možné vrátiť sa do vrchola, ktorým sme už raz prešli. Je to akoby vrcholy ležali na kružnici. V teórií grafov sa taká cesta po vrcholoch v smere orientovaných hrán, ktorá je uzavretá, nazýva **kružnica**. Grafmi s kružnicami sa nebudeme zaoberať, pretože by sme sa po kružnici mohli pohybovať dookola donekonečna a hra by sa nikdy neskončila.

Časť 3 Odčítacie hry: experimenty v Exceli

Čo sme sa doteraz naučili:

V prvej hre hráč, ktorý je na ťahu, musí odobrať jednu, dve alebo tri zápalky. Nech je na začiatku hry je na kôpke 25 zápaliek.

V tabuľke nižšie je v prvom riadku zapísaný počet zápaliek a v druhom riadku pozícia, ktorá tomuto počtu zápaliek v hre zodpovedá. Nulou je označená pozícia porazeného, jednotkou pozícia víťaza. Druhý riadok čítajme zľava, počet zápaliek 0 predstavuje koniec hry.

Počet zápaliek	0	1	2	3	4	5	6	7	8							
Hodnota (0 alebo 1)	0	1	1	1	0	1	1	1	0							

Teória víťaznej cesty

Množina $\{1, 2, 3\}$ v hre sa nazýva **odčítacia množina** hry. Predstavuje ťahy hráčov povolené pravidlami hry. Príslušná postupnosť jednotiek a núl sa nazýva **víťazná cesta**.

Popis víťaznej cesty v tabuľke vyššie je jednoduchý a je to zároveň popis výhernej stratégie, ktorá predstavuje víťaznú cestu pre prvého hráča. Druhý riadok vypĺňame zľava, posúvame sa 1, 2 alebo 3 kroky zľava doprava po víťaznej ceste. Je to to isté, ako keby sme odoberali jednu, dve alebo tri zápalky z kôpky na stole.

Víťaz si musí uvedomiť, že jeho súper musí v hre ťahať na pozíciách označených nulou. Na víťaznej ceste sa víťaz pohybuje smerom doľava tak, že po jeho ťahu je hra v pozícii porazeného, v pozícii označenej nulou. Hráč, ktorý prehráva, sa nikdy v tejto situácii neocitne, pretože z pozície nula sa nikdy nedostane do nasledujúcej pozície nula.

Druhý riadok tabuľky sa preto skladá z postupnosti za sebou idúcich štvoríc: 0111. Hovoríme, že dĺžka opakujúcej sa časti postupnosti je štyri. Víťaznú cestu takej to hry nazývame víťazná cesta **s periódou štyri**.

Môžeme skúmať, aké postupnosti jednotiek a núl (víťazné cesty) patria k odčítacím množinám iných typov. Otázky, ktorými sa môžeme zaoberať:

- Aká postupnosť tvorí víťaznú cestu?
- Existuje víťazná stratégia pre hráča, ktorý je na ťahu prvý?

7. Prípravné cvičenie.

Precvičte si svoje vedomosti a nájdite víťazné cesty pre dané odčítacie množiny. Ak odhalíte, že daná postupnosť je periodická, vyznačte v nej periódu.

- | | | | | | |
|---------------------|---------------|-------------------|------------------|---------------|-------|
| a. $\{1, 2, 3, 4\}$ | víťazná cesta | 0 1 1 1 1 0 1 ... | e. $\{1, 3, 4\}$ | víťazná cesta | |
| b. $\{1, 2\}$ | víťazná cesta | | f. $\{2, 3, 4\}$ | víťazná cesta | |
| c. $\{1, 3\}$ | víťazná cesta | | g. $\{2, 4\}$ | víťazná cesta | |
| d. $\{1, 2, 4\}$ | víťazná cesta | | h. $\{3, 6\}$ | víťazná cesta | |

8. Odhad s dôkazom.

a. Odčítacie množiny **g** a **h** sú podobné odčítacej dvojici **b**; **g** tvoria dvojnásobky a **h** tvoria trojnásobky prvkov odčítacej množiny **b**.

To znamená, že víťazné cesty **g** a **h** majú s víťaznou cestou **b** niečo spoločné.

Ako môžeme nájsť víťaznú cestu $\{4, 8\}$ ak poznáme víťaznú cestu $\{1, 2\}$?

b. Ak ste si nie ešte celkom istí svojou odpoveďou na predchádzajúce otázky, skúste nájsť víťaznú cestu pre inú odčítaciu množinu a jej násobok. Skúste napríklad **e** a jej dvojnásobok $\{2, 6, 8\}$.

c. Preskúmajte ešte niekoľko dvojíc odčítacích množín. Ak ste si teraz svojím zistením istí, určite nebude pre vás problémom sformulovať všeobecne platné pravidlo. Sformulovanie všeobecného pravidla je dôkazom vzťahu, ktorý ste odhalili.

9. Bloky núl a bloky jednotiek vo víťaznej ceste

- a. Vo víťaznej ceste odčítacej množiny $\{1, 2, 3\}$ sa nachádza blok zložený z troch jednotiek. Blok núl tvorí iba jedna nula. Trojka je najväčšie a jednotka je najmenšie číslo, ktoré patrí do odčítacej množiny. Dá sa tento jav zovšeobecniť?
- b. Je to pravda?
Ak je vo víťaznej ceste dĺžka najdlhšieho bloku, ktorý sa skladá zo samých jednotiek, rovná najväčšiemu číslu z odčítacej množiny, potom odčítacia množina obsahuje čísla od 1 až po dané najväčšie číslo.

Ďalšie odhady o víťazných cestách

Skúmanie pomocou počítača: program TakeAway

Postup, akým vieme určiť víťaznú cestu, je zakaždým rovnaký. Vezmime si odteraz na pomoc počítač. Otvorte súbor s názvom "**TakeAway**".

Po otvorení súboru uvidíte v hornej časti obrazovky odčítaciu množinu $\{1, 4\}$ a pod ňou je napísaná víťazná cesta, ktorá k nej patrí. Nachádza sa tu tiež informácia o perióde a o pozícií, v ktorej perióda začína.

Ak do odčítacej množiny vložíte iné čísla (odčítacia množina môže mať maximálne sedem prvkov), program automaticky vygeneruje zodpovedajúcu víťaznú cestu.

Stručný návod ako pracovať so súborom "**TakeAway**" sa nachádza v samostatnom dokumente.

Teraz sa môžete venovať vlastnému skúmaniu. Formulujte svoje odhady a skúmajte ich. Ponúkame vám niekoľko nápadov. Záleží iba na vás, čo budete skúmať, aké príklady si k svojmu skúmaniu vyberiete a s akými argumentami budete zdôvodňovať svoje závery. Preto nie sú nápady, ktoré uvádzame nižšie, číslované ako úlohy, ale sú označené bodkami, ako možnosti na zamyslenie.

Periodicita

Určite ste si všimli, že pri odčítacích množinách s malým počtom prvkov, sa vo víťaznej ceste opakuje nejaký blok jednotiek a núl.

Takýto blok nazývame **perióda víťaznej cesty**.

Vecná a faktická argumentácia, pri opise riešení nasledujúcich nápadov na skúmanie, je vítaná!

- Určte periódu odčítacej množiny $\{1, n\}$ pre ľubovoľnú hodnotu n ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$).
Tvrdenie sformulujte napríklad takto: "Odčítacia množina $\{1, n\}$ má periódu víťaznej cesty tvaru ...".
- Uvažujte aj o odčítacej množine tvaru $\{2, n\}$.
- K dvom odčítacím množinám $\{1, 3, 6\}$ a $\{1, 2, 3, 8\}$ nájdete periódny víťaznej cesty, ktoré majú dĺžku 9. Ale bloky vytvorené z núl a jednotiek nie sú totožné. Dokážete nájsť viac podobných príkladov odčítacích množín alebo/a rovnako dlhých periód víťazných ciest a k nim prislúchajúcich odčítacích množín?

